测量与地球物理集刊　　第 3 号

（1981 年）

目　　录

多普勒观测网的数学处理……周江文（ 1 ）
多普勒观测的误差分析……宋文尧（ 7 ）
根据武昌时辰站等高仪观测结果推求 FK4 星的星位订正 ……
…… 中国科学院测量与地球物理研究所武昌时辰站、南京大学天文学系（ 27 ）
关于天文方位角测定的若干误差问题……韩天芑（ 47 ）
风对武昌时辰站 Danjon 等高仪观测的影响 ……孙永庠（ 57 ）
利用我国各台站纬度观测资料对张德勒周期的分析……钱益明（ 65 ）
天文重力水准计算方案……方　俊（ 71 ）
关于 1° × 1° 平均重力异常的计算 ……
…… 许厚泽、高志忠、许尤楠、杨怀冰、王纲义、蒋福珍（ 81 ）
应用均衡理论推求 1° × 1° 的平均空间异常 ……
……孟嘉春、张赤军、蒋福珍、高志忠、任富朝（ 97 ）
潮汐观测中仪器记录格值观测序列的样条拟合 …… 许厚泽、朱灼文（109）
关于 Venedikov 调和分析的一点注记……许厚泽、毛慧琴（113）
固体潮水平分量理论值的计算……毛慧琴（117）
关于精密近程无线电定位仪的精度问题……王广运（125）
半导体管参数变化对精密仪器精度影响的探讨……徐治洋（135）

ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA, No. 3

(1981)

CONTENTS

Mathematical processing of Doppler observation nets ..... Zhou Jiangwen (6)
Error analysis of Doppler observations ..... Song Wenyao (25)
Position corrections to the FK4 stars derived from the results of observations with Wuchang Time Observatory Danjon astrolabe ..... Wuchang Time Observatory, Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica, Department of Astronomy, Nanjing University (46)
On problems of systematic errors existing in the astronomical determination of azimuth ..... Han Tianqi (56)
Wind effect on the observational results with a Danjon astrolabe at Wuchang time observatory ..... Sun Yongxiang (64)
Analysis of Chandler period from latitude observations in the observatories of China ..... Qian Yiming (70)
Computation of the astro-gravimetric levelings ..... Fang Tsün (80)
Computation of the mean gravity anomalies of $1^\circ \times 1^\circ$ squares ..... Xu Houze Gao Zhizhong, Xu Younan, Yang Huaibing, Wang Gangyi, Jiang Fuzhen (95)
Calculation of mean free-air gravity anomalies of $1^\circ \times 1^\circ$ squares by applying the isostatic theory ..... Meng Jiachun, Zhang Chijun, Jiang Fuzhen, Gao Zhizhong, Ren Fuchao (107)
Spline-fit on the observation series of the instrument recorder scale in the earth tidal observations ..... Xu Houze, Zhu Zhuowen (112)
Notes on the method of Venedikov's harmonic analysis ..... Xu Houze, Mao Huiqin (115)
Calculation of the theoretical value of the horizontal components of Earth tides ..... Mao Huiqin (123)
On the accuracy of the short range radio positioning equipment ..... Wang Guangyun (134)
Research on the influence of the variations of the transistor parameters on the instrumental accuracy ..... Xu Zhiyang (151)

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

多普勒观测网的数学处理

周 江 文

摘　　要

本文研究多测站、多卫星、多弧段的多普勒观测网的数学处理，目的是求得精确的测站地心坐标，为此同时利用观测本身对不精确的卫星轨道及其他数据进行修正。内容包括观测的选择与计算，观测方程的建立以及平差的原则方案。

一、多普勒观测

多普勒观测是在人造地球卫星上设置稳定振源，由地面测站接收，测量多普勒频移，用以计算卫星与测站间距离的变化，如果知道卫星的轨道位置，就可测定测站的地心坐标。现在经过数天的观测，已可达到数米的地心坐标精度，这是现代测量技术提供的高效测量方法之一。本文着重研究多测站、多卫星、多弧段组成的观测网的数学处理，除涉及本题部分，不讨论一般原理。

设振源 S，振动频率 f，测站 P，与 S 相距 ρ，两者相对运动速度 v，相对距离速度 $\dot{\rho}$，接收频率

$$f' = f\left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c}\right) \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sim f\left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c}\right) \tag{1}$$

c 为真空光速。右式有主要改正项 $+\frac{f}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$（通称相对论改正），其值应纳入计算，但在一次卫星经过时间内近于常值，因此可在观测方程内予以计及（见本文第四节）。

由(1)得频移

$$\Delta f = f' - f = -\frac{f}{c}\dot{\rho} \tag{2}$$

在非真空介质中传播时，传速 $c' = c/n$，n 为介质折射系数，它是变化的，(2)式应为

$$\Delta f = -\frac{f}{c}\frac{d}{dt}\int n d\rho = -\frac{f}{c}\dot{\rho}' \tag{3}$$

其 $d\rho' = nd\rho = nc'd\tau = cd\tau$，$\rho'$ 为按真空传速计算之行程，与实际行程 ρ 相区别。

实际观测时，于测站设参考频率 f_0，计差频 $f_0 - f'$ 的周数

$$N = \int_{\Delta t}(f_0 - f')dt = (f_0 - f)\Delta t + \frac{f}{c}\Delta\rho' \tag{4}$$

其中 Δt 是 N 的积分时间。为得到精确的时间，一种有效方法是 N 取整周数（相差为 0），并测量卫星时标到前方整周的时间——前伸时间，由标称时间加前伸时间，可得精确的积

分时间，这时由卫星到接收机记录中间各种误差源(例如，颤抖随机变化，其值可达 100 微秒，极有害)对于前伸时间的两端基本相同，因而相消。同时，观测结果是周时对应，N的周数可按需要选定，误差只与两端计时有关。

Transit 卫星发送两种频率 $f = 399.968$ 兆赫，$f_1 = 149.988$ 兆赫，$f = \frac{8}{3}f_1$. 参考频率 f_0 取 400 兆赫(相应波长 $\lambda_0 \sim 75$ 厘米)，$f_0 - f \sim 32$ 千赫。

由(4)，可知N的测量误差 0.2 周与 Δt 误差 6 微秒，ρ' 误差 11 厘米相应，11 厘米的切向轨道误差与 t 的误差 15 微秒相应。卫星时标校正级为 9.6 微秒，可满足要求；计算标称时间时，如中间有校正，要计入。

二、折射改正

ρ' 与 ρ 之差决定于介质的折射系数。此项改正精度要求达到厘米级，这在对流层尤为困难。

设在测站上，大气压为 p 毫巴，水汽分压为 e，气温 $T°K$，折射系数 n_0，射线高角 h，测站高程H米，对流层改正可采用 Willmann-Hopfield 公式(1969—1970)[1]

$$\rho' - \rho = \frac{2(n_0 - 1)H_0}{\sin h + \sqrt{\sin^2 h + 4H_0/r}} = d \tag{5}$$

其中 H_0 称为尺度高，r 为平均地球半径，可取 6,370,000 米，

$$5 \times 10^6(n_0 - 1)H_0 = N_d[40082 + 148.98(T - 273.15) - H] + N_\omega(11500 - H) = N_0$$

$$5H_0 = \frac{N_0}{N_d + N_\omega}$$

$$N_d = 77.6\frac{P}{T} \tag{6}$$

$$N_\omega = 3.73\frac{e}{T^2} \times 10^5$$

公式精度可能达到厘米级。为此，水汽分压的测定误差应在 0.5 毫巴以下。为了提高对流层改正的精度，我们还将在观测方程中引进改正因子(见本文第四节)。

电离层的折射改正通常由两个以上不同的频率观测求之。根据 Weiffenbach (1967)

$$n \sim 1 - \frac{bM}{f^2} \tag{7}$$

其中M为电子密度，b 为常数，可见 $n - 1$ 与 f^2 为反比，因此可加利用。由(4)

$$N = (f_0 - f)\Delta t + \frac{f}{c}\Delta\rho + \delta \tag{8}$$

其中 δ 和 f 反比：$\delta = \frac{\beta}{f}$

对于另一频率 f_1(这里 $\frac{8}{3}f_1 = \alpha f_1 = f$)，接收时可将 f_1 改为 αf_1，于是

$$N_1 = (f_0 - \alpha f_1)\Delta t + \frac{\alpha f_1}{c}\Delta\rho + \alpha\delta_1, \quad \delta_1 = \frac{\beta}{f_1} = \alpha\delta \tag{9}$$

自(3)减去之，得

$$N - N_1 = (1 - \alpha^2)\delta,\ \delta = \frac{N - N_1}{1 - \alpha^2}\left(-\frac{9}{55}(N - N_1)\right) \tag{10}$$

这种可能性对于对流层和相对论改正显然不存在。Weiffenbach 公式没有计及地磁场的影响 $\frac{1}{f^3}$ 项，由于 f 大，此项影响可以不计。

三、Transit 卫星播发的轨道数据

每个 Transit 卫星 (NNSS) 用 f, f_1 两种频率调相播发轨道参数，每两分钟播发一组，包括时标，变参数每双分之值，定参数每 12 小时不变。

变参数为 ΔE，ΔA，η，其意义见下面的算式。定参数代表一平滑进动椭圆轨道，参数指卫星过近地点时之值，包括：

t_P——卫星过近地点时刻；

n——平速；

ω_P——近交距，及 $\dot{\omega}$，$\omega = \omega_P - \dot{\omega}(t - t_P)$；

ε——离心率；

A_P——长半径 $(A = A_P + \Delta A)$；

Ω_P——升交点赤经，及 $\dot{\Omega}$，$\Omega = \Omega_P + \dot{\Omega}(t - t_P)$；

i——倾角；

λ_G——格林威治赤经，恒星时 $\theta = \lambda_G + \omega_e(t - t_P)$ ω_e 为自转角速；

$f - f_0$ 差频。

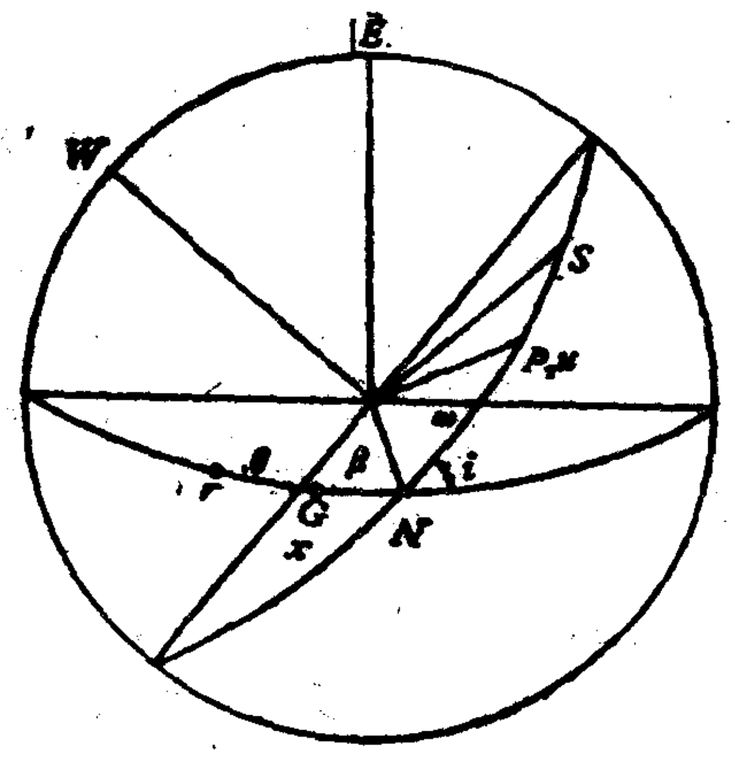


图 1

坐标系统如图。Z 是 CIO 约定地极，γ 是真春分点，G 代表平均格林威治天文台，G、Z 构成地球坐标系统 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$。$NS$ 是轨道平面，N 是升交点，P 是近地点，Kepler 坐标 $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ 的计算式如下：

$$\left.\begin{aligned} &\text{平近点距 } M = n(t - t_P) \\ &\text{离心角 } E = M + \varepsilon \sin M + \Delta E \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} u = A(\cos E - \varepsilon) \\ v = A \sin E \\ w = \eta \end{cases} \tag{11}$$

t 采用 UTC

由轨道坐标换至地球坐标，中间经过旋转阵，即

$$X = \mathrm{III}(-\beta)\mathrm{I}(-i)\mathrm{III}(-\omega)U = R_{XU}U \tag{12}$$

或

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\beta - \sin\omega\sin\beta\cos i & -\sin\omega\cos\beta - \cos\omega\sin\beta\cos i & \sin\beta\sin i \\ \cos\omega\sin\beta + \sin\omega\cos\beta\cos i & -\sin\omega\sin\beta + \cos\omega\cos\beta\cos i & -\cos\beta\sin i \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

其中 $\beta = \Omega - \theta$.

播发的轨道数据由美国四个观测站36小时观测预推12小时，属WGS-72/NWL-10F大地坐标系统，$a = 6378,135$ 米，$\alpha = 1:298.26$，作了经度及尺度改正。估计其切向根差25米，径向7米，极向13米，点位根差29米。

四、观测方程式

(8) 式可写成:

$$\Delta\rho = \lambda(N - \delta - (f_0 - f)\Delta t) - \Delta d \tag{13}$$

其中 $\lambda = \frac{c}{f}$ 是波长，这是基本观测方程式。ρ 得以卫星 S、测站 P 的坐标表达之，如果 S 的坐标已知，就可由观测求得 P 的坐标。实际观测由多测站，测多卫星，多弧段，构成观测网；多卫星、多弧段用以提高绝对精度；多测站观测相同弧段，时空相近，误差相近，可以相消，是提高相对精度的方法。此外，网的构形也必须考虑。

卫星的播历，如前所述，有较大的误差，必需由观测本身对它进行修正。据 W. H. Guier 的研究，卫星一次经过(这里称为一弧段)，弧段误差得以平行移动表达之，我们取径向改正 dA，极向 $d\eta$，切向 dt_p，作为待求未知量。

除了站坐标及轨道修正外，还需计入几项未知误差，① $f_0 - f$ 的误差 df，来自 f_0，f 及未知漂移，并计及前述的相对论改正，②对流层折射改正仍可有较大的因子误差，为此引进折射比例误差 μ，d 的正确值为 $(1+\mu)d = d + \mu d$；③时标收录有较大误差，已如前述，为此引入站时差 dt. 这数者也作为待求未知量。

误差模型要有充分的根据，不是纯数学的考虑。模型不当将使解受到歪曲。上述模型是初步的考虑，需在实际处理分析中进一步加以确定。

现在以近似值及未知改正表达(13)。

设卫星坐标 $X + dX$，测站坐标 $X_0 + dX_0$，$X - X_0 = DX$，于是

$$\rho_0^2 = DX' \cdot DX,$$

$$d\rho = \frac{DX'}{\rho_0} dX - \frac{DX'}{\rho_0} dX_0 \left(\text{计算} \frac{DX'}{\rho_0} = (a, b, c)\right)$$

由 $X = R_{XU}U$ (12)求 $dA, d\eta, dt$ 对 X 及 ρ 的影响，

$$dX_A = R_{XU}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}\frac{dA}{A}\left(\text{计算} \frac{DX'}{\rho_0} R_{XU} = (\alpha, \beta, \gamma)\right)$$

$$d\rho_A = (\alpha u + \beta v)\frac{dA}{A}$$

$$dX_\eta = R_{XU}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\eta,\ d\rho_\eta = \gamma d\eta$$

$$dX_t = R_{XU}\begin{pmatrix} -A & \sin E \\ A & \cos E \\ & 0 \end{pmatrix}(1 + \varepsilon\cos M)n dt$$

$$-\begin{bmatrix} -\cos\omega\sin\beta - \sin\omega\cos\beta\cos i & \sin\omega\sin\beta - \cos\omega\cos\beta\cos i & \cos\beta\sin i \\ \cos\omega\cos\beta - \sin\omega\sin\beta\cos i & -\sin\omega\cos\beta - \cos\omega\sin\beta\cos i & \sin\beta\sin i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\omega_e dt$$

$$d\rho_t = (-\alpha v + \beta(u + A\varepsilon))n(1 + \varepsilon\cos M)dt + (ay - bx)\omega_e dt$$

式中将 dt 换为 $-dt_P$，则得 dt_P 引起 ρ 的误差。

(13)式右方 df 和 μ 引起的改正为 $-\lambda\Delta t df - \Delta d\mu$，

总起来，观测方程写成：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\rho_0 - \lambda N + \lambda\delta + \lambda(f_0 - f)\Delta t + \Delta d + v \\ &\quad = g_f df + \Delta g_t dt + g_u\mu && (X_{ik}) \\ &\qquad + \Delta g_A dA + \Delta g_P dt_P + \Delta g_\eta d\eta && (X_k) \\ &\qquad + \Delta a dx_0 + \Delta b dy_0 + \Delta c dz_0 && (X_i) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &g_f = -\lambda\Delta t \\ &g_t = (\alpha v - \beta(u + A\varepsilon))n(1 + \varepsilon\cos M) + (bx - ay)\omega_e \\ &g_u = \Delta d \\ &g_A = -\frac{\alpha u + \beta v}{A} \\ &g_P = -g_t \\ &g_\eta = -\gamma \\ &\frac{DX'}{\rho_0} = (a, b, c), \qquad \frac{DX'}{\rho_0}\cdot R_{XU} = (\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Δ 指积分起讫时间计算值之差。

积分时间的长短和 N 的精度没有直接关系，如第一节所述，周时观测只与起讫有关，因而观测基本上可作等权、独立。另一方面，观测方程的精度则随积分时间而提高，由(14)式不难看出未知量的系数都随积分时间而增大，也就是说方程的灵敏度提高，这很重要。当然，积分时间长将减少观测数，为免观测过少，并保持观测独立，建议取交错时段如图 2。图中未注时间单位，可根据实际情形选定。

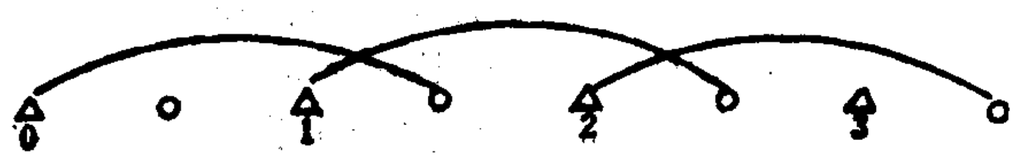


图 2

五、观测网平差

本文只作原则性讨论，不涉及具体方案。设想数字均加圆括号。(四)站相距(500)公里，相约观测(10)天，测弧段(100)(不严格要求同时)，一站测一弧段可得观测(10)，于是有总观测数(4000)。未知量区分为站未知量(X_i)，弧段未知量(X_k)及站弧未知量(X_{ik})(参看(14))，本例 X_{ik} 有(1200)，X_k 有(300)，X_i 有(12)，共计(1512)。经过平差，测站坐标精度可望达到(±2 米)，相对精度可达(±0.2 米)。

未知量按 X_{ik}, X_k, X_i, 适当排列先后,运用分立与结合程序,以缩短计算过程,提高解算精度。具体地说,先按 ik 分组作 X_{ik} 的法方程式及 X_k, X_i 的部分法方程式;分组消去 X_{ik} 后,同 X_k,X_i 的约化法方程式相加,然后消去 X_k, 得 X_i 的最后约化法方程式,它决定 X_i 的值及权。既得 X_i, 也可回代相应方程求 X_k 及 X_{ik}, 供模型鉴定及误差分析(包括求单位权方差)之用。

更大的网也可采用分立与结合的方法,接合点的约化法方程式相加,其绝对精度可再提高。重复进行网的观测时,也可用约化法方程式相加的方法加以合并,得到最后严密结果。

X_{ik} 和 X_k. 有随机性,如知其分布,理想的处理方法将是拟合推估。

参 考 文 献

[1] Brown, D. C. et al., Extension to SAGA for the Geodetic Reduction of Doppler Operations, AFCRL-TR-73-0177, (1973)

MATHEMATICAL PROCESSING OF DOPPLER OBSERVATION NETS

Zhou Jiangwen

(*Institute of Geodesy and Geophysics Academia Sinica*)

Abstract

1. Doppler Observations
2. Refraction Corrections
3. Broadcast Ephemeris of the Transits
4. Observation Equations
5. Adjustment of the Net

This paper deals with the mathematical processing of a Doppler observation net involving many tracking stations, many satellites and much more arcs, the aim is to procure accurate geocentric coordinates of stations, while the inaccurately known orbits and other data being improved simultaneously. In the paper, choice of integration intervals, appropriate refraction models, forms of observation equations and principle of net adjustment are suggested.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

多普勒观测的误差分析

宋 文 尧

摘　　要

多普勒观测的误差源可分为三类，即轨道误差、折射误差和接收误差，本文分析了上述误差产生的物理成因、误差的量级以及测定或削弱误差的途径，为拟订多普勒观测网的实施方案提供理论依据。

利用 Transit 卫星导航系统进行定位，在国内外颇为盛行，它突破了传统大地测量的理论和方法，以最快的速度，较高的精度测定地心坐标。该坐标系是以地球质心为原点(与地心相差为 $\Delta x = 0.5$ 米、$\Delta y = -1.3$ 米 $\Delta z = 0.7$ 米)，短轴与地球自转轴相重合的三维空间直角坐标系，同时采用了 1972 年世界大地测量坐标系（WGS-72）的椭球模型，其主要地球参数为：

长半轴 $a = 6378135$ （± 5）米

短半轴 $b = a(1 - f) = 6356750.52$ 米

扁　率 $f = 1/298.26$ （$\pm 0.6 \times 10^{-7}$）

引力常数 $GM = 398600.5$ 公里^3/秒^2（± 0.4）

确定地球模型、坐标系以及地球位函数的球谐系数，简称定场。

Transit 卫星导航系统是由近似圆形极轨道的六颗卫星所组成的（其中一颗已经失效），平均高度为 1100 公里，运行周期为 106.3 分钟，卫星线速度为 7.5 公里/秒，角速度为 3.°4/分，地平以上观测的持续时间为 18 分钟，卫星视区范围的直径为 6700 公里，顾及卫星运行周期和地球自转周期，运行的测盖区域在我国境内(φ 从 0° 到 45°)，每圈视带向西移动约 26°，相当于平均距离为 2500 公里，同一卫星两次经过的视带重叠范围可达 60%，在中纬度地区每 60 分钟，赤道约 120 分钟可以观测到任一 Transit 卫星，因此 Transit 卫星的视带基本上覆盖全球。Transit 卫星发播了标准频率 (399.968 兆赫和 149.988 兆赫)、时标和轨道信息，在导航电文中，包括了已解密的 A 组轨道参数，即经平滑处理的开普勒密切椭圆的定参数以及对此所作修正的变参数，通称广播星历。在五颗使用的卫星中，NNSS30190 和 30200 号卫星编算了精密星历。利用多普勒接收机可以确定轨道参数，简称定轨。

，根据导航电文(或精密星历)，可以得到以时间为函数的卫星位置，为了测定站坐标，可以利用各种类型的多普勒接收机（如加拿大 CMA-722B，美国 JMR-1，JMR-3，MX1502），通过测量多普勒频移，从而求出测站与卫星之间的距离差。定站计算是根据轨道参数和近似站坐标计算出相应距离差，利用各种数学模型，将计算值拟合到多普勒观测值，即可定出站坐标的改正值，这种方法简称为定站。

定场、定轨、定站三者是密切相关的，互为因果的。在人造卫星大地测量中，已知卫星位置，可以测定站坐标；或者已知站坐标，可以反测轨道参数，其数据处理互为逆运算。目前在国际上进行多普勒定位，一般采用两类方法，即：

A. 轨道参数不参加平差，如：

(1) 单点定位；

(2) 传测法。

B. 轨道参数参加平差，如：

(1) 短弧大地测量平差(简称 SAGA)；

(2) 短弧传测法；

(3) 多点半短弧法。

不论采用那种方法，都必须研究多普勒观测的误差因素。根据有关文献[3]指出：多普勒观测误差源可分为三类：即轨道误差、折射误差和接收误差，本文试图就此问题，讨论误差产生的物理成因。误差的估算量级以及削弱或测定误差的途径，为拟定多普勒观测网的实施方案提供理论依据。

一、轨道误差

Transit 卫星的轨道误差取决于卫星的摄动方程的模型、折射影响的消除程度、卫星跟踪站的数目及全球分布状况、跟踪站的坐标精度、卫星装置和地面接收机的工作性能、起算数据的精度及其计算轨道的程序。1974 年 1 月 27 日广播星历由于消除极移误差（约 10 米)而得到改进，1976 年 12 月 12 日起采用 WGS-72 地球模型作为卫星星历计算的基础，使轨道误差大为减小。下面介绍精密星历与广播星历概况：

精密星历　该星历是由美国国防制图局（U.S. Defence Mapping Agency）提供的，它根据全球 NNSS 跟踪网的 20 多个测站，48 小时的多普勒观测数据拟合轨道弧段所计算的。并按 UTC 每分钟给出了卫星的位置和速度，位置到 1 米，中误差为 ±0.3 米，速度到 1 毫米/秒，中误差为 ±0.3 毫米/秒，各次卫星经过之间的轨道是相关的，因为按最小二乘拟合，在 48 小时内受到所采用的力模型所制约，各次经过之间的相关性是由于大气阻力、极坐标、地球重力场及其他参数所引起的，其中每项因子都会使轨道产生 2—4 米的误差，DMA 认为，利用单点定位 25 次经过其坐标内符根差为1.5米。由于精密星历是后处理的，外业无法立即得到，故有损其优点。精密星历是根据国际合作协定所提供，目前我国无法使用。

广播星历　地面注入站每天两次把广播星历注入到卫星存储器内，通过卫星运行，自动地向用户广播。广播星历的轨道参数是由美国海军航天大队（U. S. Naval Astronautics Group）的四个跟踪站对多普勒数据作 36 小时拟合轨道弧段计算出来的，除采用近期数据外，还外推弧段 16 小时。广播星历的轨道偏差分解为三个分量：即切向 ΔE，极向 η 和径向 Δa，ΔE 给到 0.″0001，η 和 Δa 给到 10 米，由于取舍误差引起的中误差分别为 4，3，3 米。从四个跟踪站的多普勒观测数据中估算轨道的切向、径向、极向的中误差分别为 26，5，10 米，其位置误差可达 ±28 米。

Wells 深入研究了广播星历的精度后指出：同时利用两种星历并进行比较，可以看出广播星历的变参数与精密星历所计算的相应值是相当的，从一次经过所涉及的 ΔE，Δa，η 与精密星历相比较，两种星历所确定的轨道平面是互相平行的，利用多次经过两种星历三个轨道偏差分量的差均值，用来衡量广播星历的精度(见表 1) 为：

表 1 广播星历的精度

	经过次数	ΔE (米)	Δa (米)	η (米)	均方根(米)
广播星历与精密星历相比较 1970 年数据	99	31	4	11	33
1972 年数据	126	20	4	11	23
新旧轨道之间的比较 1973 年数据	94	13	2	6	14
采用值		26	5	10	

从表1可以看出：如果用户正好在每天两次注入数据时跟踪卫星，则可通过精密星历同新(注入后)、旧(注入前)的广播星历相比较，可以得到外推误差，这种误差可解释为地球位模型误差 17 米以及舍入误差为 6 米。

按两种星历所计算的地面距离的内符精度也是相当的，例如从九条弦长 (372.7 公里到 1267.7 公里) 的分析中，可以看出两种星历所算得的距离差约为 ± 1 米左右。按两种星历算得的距离与三角测量相比较，其外符精度也是相当的，例如

三角测量	837565.8 米 ±1.7 米
1973 年(精密星历)	837567.1 米 ±1.3 米
1974 年(广播星历)	837566.7 米 ±1.1 米
1974 年(精密星历)	837566.9 米 ±0.5 米

因此，对测站坐标和距离来说，采用多次经过、多站解算的方法，两种星历是相当的。

目前在国际上为了削弱广播星历的轨道误差及其他误差，提高测站坐标的精度，一般采用两种方法，即传测法和短弧法。传测法是单点定位的特殊形式，它至少需要两台以上的接收机，在两个以上的测站上观测卫星多次经过，然后从全部数据中，挑选站间严格同时观测同一卫星的一些数据进行解算，其定位精度可达 2 米，相对精度可达 0.5 米，这种方法的优点可以消除轨道误差和折射改正的剩余影响，其缺点是被剔除的观测量约占总数 1/2 以上(距离越长，剔除越多)，所以站间距离宜在 500 公里左右。

短弧法要求 2—4 台接收机，在 2—4 测站上，共同观测同一卫星经过的相同弧段(并不要求严格同时)，把轨道误差、折射误差和接收误差的某些因子作为待定系数，通过多普勒观测网的统一平差后，可以同时确定：

(1) 多普勒网的全部测站 x，y，z 坐标；

(2) 每次卫星经过时六个轨道根数的平差值；

(3) 各站每次经过时的五个待定改正值，即零点，计时误差、频偏、频漂及对流层折射的尺度差。采用严格的 SAGA 后，可以弥补广播星历的轨道误差，同时把定站定轨一并解算出来，是目前行之有效的方法。

多点半短弧法是采用九个待定系数，即测站坐标的三个分量、卫星的切向、径向、极向误差、频偏 ΔF、对流层折射的尺度差 K 以及时间比对误差 A，多点半短弧法在 1976 年

和 1977 年西欧、西德和奥地利的多普勒会战中得到普遍利用，当观测 100—160 次经过时，使用广播星历的定位精度与精密星历完全相当。

广播星历的轨道改进除在上述数据处理中考虑外，在观测纲要方面也应有所顾及。Transit 卫星在极轨道上运行，切向误差与纬度测定密切相关，而极向误差对经度和高度测定产生综合影响。因此，在观测纲要中应该规定：在一个观测阶段里，使卫星经过保持东西南北四个方向的数量平衡，即卫星向东经过与向西经过的次数大约相等；向南经过与向北经过次数大约相等；卫星经过测站时，在近站点两侧，多普勒计数的数目大约相等，采用上述纲要，还可削弱折射误差的影响。

二、折射误差

Transit 卫星的射频信号在空间介质里传播，必然经过电离层和对流层而产生折射。一般来说，低频电波受到电离层吸收而衰减，临界频率以下的电波被电离层反射，此外 10 千兆赫以上的电波被大气层所吸收，根据国际无线电咨询委员会(CCIR)规定：卫星通信频率的最佳范围是 1 至 10 千兆赫，这个范围的电波可看作自由空间传播。Transit 卫星发射的双频可以穿过各层而受各层不同介质所折射，这种折射效应反映为电磁波穿过各层时传播速度的变化以及射线传播路径偏离几何直线路径，因而严重地影响到多普勒计数的失真，如图 1 所示。

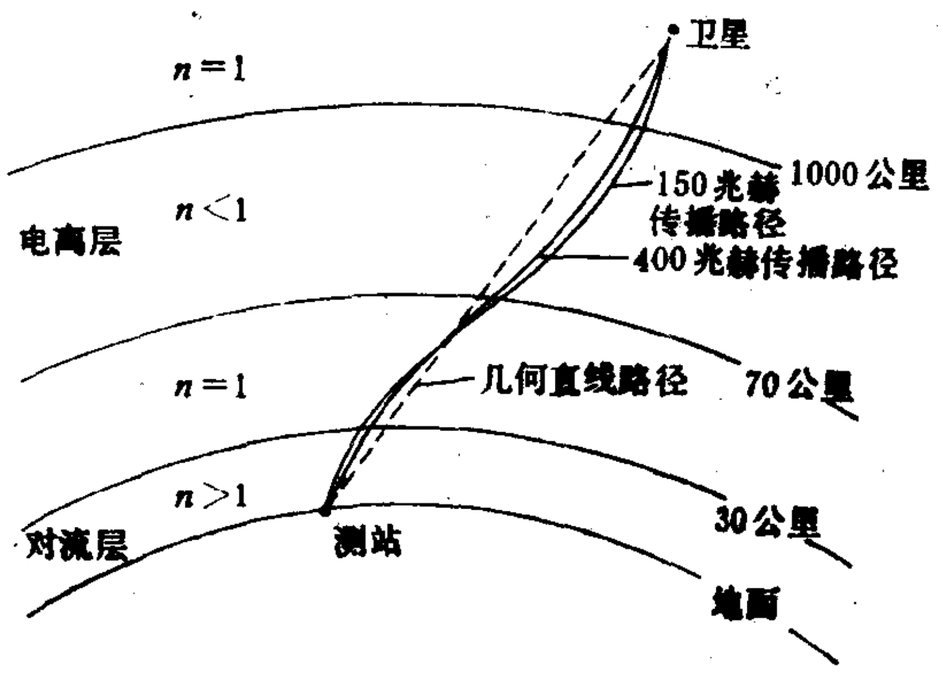


图 1

Weiffenbach[5] 和 Hopfield[6,7,8] 对电离层和对流层折射作了深入研究，提出了卫星发射两个相干频率可以得到电离层折射的一阶改正值，同时推导了对流层大气垂直剖面的最佳模型，利用地面气象数据和卫星的仰角可以推算对流层折射改正。然而其他学者 Willmann，Marini 以及 Kouba 在 GEODOP 平差程序[18]中，都先后提出对流层折射改正模型，但是 Hopfield 模型比较严密准确，所以在国际卫星大地测量中得到普遍应用。由于该公式复杂繁琐，而在 SAGA 中又引进对流层折射的尺度改正的待定系数，因此有必要进一步简化。根据有关文献指出：电离层折射改正的剩余误差可达 1%，对流层折射改正的剩余误差可达 5%，两者综合影响可达 3 米。如果对流层折射改正模型采用 Willmann-Hopfield 的综合公式，则可消除 99% 的折射影响，两者综合影响可降到 2 米左右。现分别阐述如下：

1. 电离层折射

太阳辐射包括短波能量，足以在地球高层大气中引起显著的光致电离现象，这样所形成的电离区称为电离层。在所讨论的折射误差中，影响最为严重的是电离层（特别是 F 层，离地面距离 250 公里）折射。当卫星发射双频信号穿过电离层时，由于它与自由电子

和离子的互相作用，电磁波的波长（λ）被拉长了，这种现象说明了信号的相速大于光速这一色散介质的特征（如图 2 所示），限于一次近似，波长的伸长与发射频率的平方成反比（下面将用公式证明）。由于卫星运动改变了穿过电离层的路径长度和波长伸长的变化率，使地面站所接收的多普勒频移中包含了电离层折射影响。

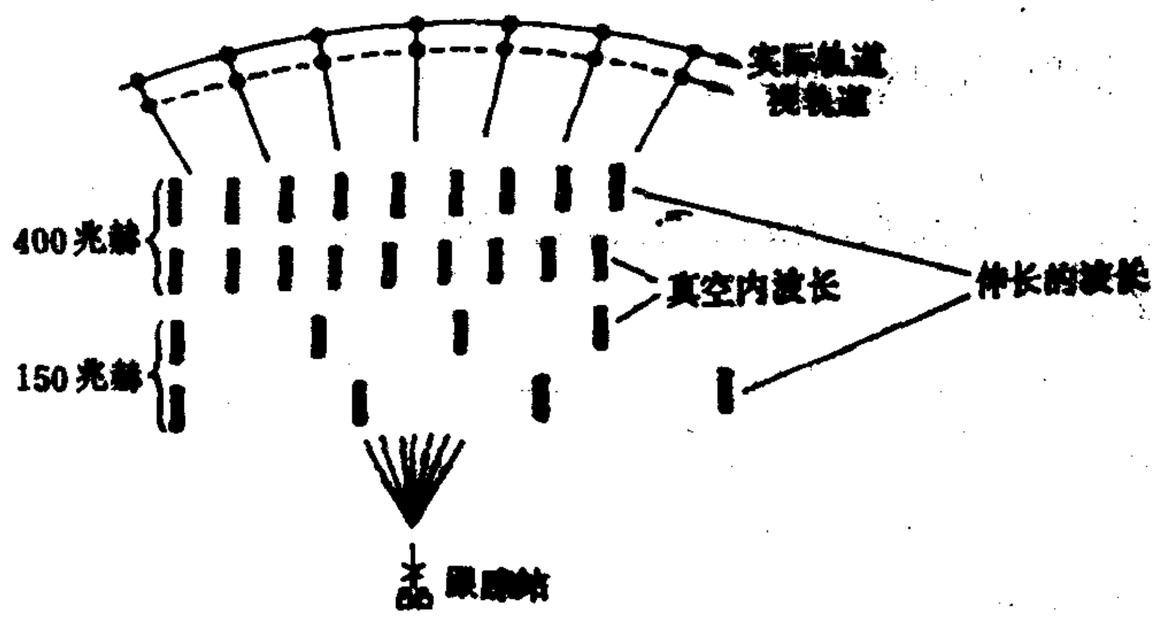


图 2

图 2 表明由于波长的伸长，卫星看来好象沿着一条较大曲率的路径，围绕接收机而运动，其影响稍微减少了总的多普勒频移。

Weiffenbach[5] 指出：电离层的折射系数可用近似公式表示：

$$n_{oe}(\xi, t) = \left[1 - \frac{f_N^2(\xi, t)}{f^2} \cdot \frac{1}{\alpha_{+-}}\right]^{1/2} \tag{1}$$

这里 $f_N(\xi, t)$ 为在 ξ 处时间 t 的电子等离子体振荡频率

$$f_N(\xi, t) = \left[\frac{N(\xi, t)e^2}{\pi m}\right]^{1/2} \quad (\text{cgs 单位})$$

式中$N(\xi, t)$ 为 ξ 处时间 t 的电子密度(单位体积内的电子数)；

e 为电子电荷；

m 为电子质量；

$$\alpha_{+-} = 1 - \frac{(f_T/f)^2}{2(1 - f_N^2/f^2)} \pm \left[\frac{f_T^4/f^4}{4(1 - f_N^2/f^2)} + \frac{f_L^2}{f^2}\right]^{1/2};$$

$f_L = f_B(\xi)\cos\theta$；

$f_T = f_B(\xi)\sin\theta$；

$f_B(\xi)$ 为电子迴转频率；

$B(\xi)$ 为在 ξ 处的地磁场；

θ 为传播矢量与 ξ 处的磁场方向之间的夹角。

这里下标 o，e 表示波动传播的圆极化的两个方向的寻常指数和非常指数。把式(1)代入下式：

$$\Delta f(t) = -\frac{f}{c}\frac{d}{dt}\int_{P(t)} n(\xi, t)ds \tag{2}$$

这里 $n(\xi, t)$ 为在 (ξ, t) 点上的折射系数；

$$n(\xi, t) = \frac{c}{u(\xi, t)};$$

$u(\xi, t)$ 为在 (ξ, t) 点上的相速；

$p(t)$ 为在时间 t 的传播路径。

进行简化，可以求出无线电信号频率的幂级数展开式：

$$\Delta f(t) = -\frac{\dot{S}(t)}{c} f + \frac{a_1}{f} + \frac{a_2^{\pm}}{f^2} + \frac{a_3}{f^3} + \cdots\cdots \tag{3}$$

这里 a_1/f 为电离层折射影响的一阶项。a_1 与 $N(\xi, t)$ 的时间导数成比例，并沿几何倾距求积分。

$a_2^{\pm}/f^2$ 为二阶项。$a_2^{\pm}$ 涉及到法拉弟旋转。它取决于极化强度，$N(\xi, t)$ 的时间导数和 θ，$a_2^{\pm}$ 项是 a_1 的 1%。

a^3/f^3 为三阶项。a_3 取决于 $N(\xi, t)$ 的不同容量以及它的空间梯度。

方程式(3)表示了电离层影响的主要特征，主要产生测量误差的是 a_1/f 和 a_3/f^3，而前者更为显著，如果不加电离层折射改正，则对倾距影响可达 200—500 米，二阶项比三阶项还小，这两项可以忽略不计。

从方程式(3)可以看出：多普勒频移与发射频率成正比，电离层折射效应与发射频率成反比。如果选择相当高的频率 (1—10 千兆赫)，用单频接收机原则上不受其影响，然而要发射和接收这样高的频率，卫星上需要很大的发射功率，地面站需要跟踪天线，这样在技术上和经费上花费甚大，为此 Transit 卫星采用了另一种办法，卫星发射两个相干频率：

$$f_{S1} = 400 \text{ 兆赫} - 32 \text{ 千赫},$$

$$f_{S2} = 150 \text{ 兆赫} - 12 \text{ 千赫}。$$

测量两个不同频率的多普勒计数可以获得最佳折射改正：

$$\alpha = f_{S1}/f_{S2} = 8/3, \quad f_{S1} = \alpha f_{S2}$$

$$\Delta N = -\frac{9}{55}(N_{400} - N_{150}) \tag{4}$$

这里 N_{400} 为 400 兆赫的多普勒计数；

N_{150} 为 150 兆赫的多普勒计数乘以 α.

利用双频只能消除 a_1/f 的一阶项，如果卫星发射两种以上的频率，可望达到更为满意的结果。

Bomford 根据公式(1)推算了折射系数的一次近似值为：

$$n(\xi, t) = 1 - \frac{N^* e^2}{2\pi m f^2}$$

如果采用单个电子质量常数 $m = 9 \times 10^{-28}$ 克，电荷常数 $e = 4.8 \times 10^{-10}$ 静电单位，则上式为

$$n(\xi, t) = 1 - \frac{41N^*}{f^2} \tag{5}$$

这里 N^* 代表每立方米的电子数，从(1)、(5)式可以看出：电离层的折射系数取决于自由电子密度，环境磁场以及无线电信号的频率，其折射系数小于 1，折射率 N 与电子密度成正比，与频率平方成反比。

$$n(\xi, t) = \frac{c}{u(\xi, t)}; \quad u(\xi, t) = c\left(1 + \frac{41N^*}{f^2}\right) \tag{6}$$

从(6)式可以看出：电磁波穿过电离层其相速大于真空中的光速，公式(5)(6)是对上述问题进一步阐明。

电离层是动态的，它受太阳辐射波和太阳粒子辐射效应，使电离层电子密度不断分布和短期突然骚扰。其密度变化可分为昼夜变化、季节变化、年变化以及太阳活动周期(包括 11 年太阳黑子周期和 27 天自转周期)。昼夜变化表现在一天内，密度最大点在地方时 14 时；最低点在夜间 2—3 时，白天变幅大；夜晚变幅小。季节变化表现在一年的各个季节里，密度最大点在 4 月初和 10 月初；密度最小点在 1 月和 7 月。年变化表现在一年内，7 月是极小点；10 月是极大点，太阳活动高年比低年大。同时电离层密度与太阳黑子 11 年周期成正相关，又与地磁场有相关效应，即磁情指数大，电子密度亦增大。因此太阳黑子活动和地磁磁扰(包括磁暴)是产生电离层短期骚扰的根源。

在观测纲要中应该明确规定，在电离层严重骚扰时，应该剔除观测结果，为此我们建议：向紫金山天文台太阳组索取每日太阳黑子数和向地磁基准台索取每天八个磁情指数 k，当 k 指数 $\geqslant 5$ 时 $(40r \leqslant RH < 70r)$ 作为磁扰或磁暴。在数据处理中，应该找出以时间为函数的各次卫星经过的多普勒观测值与太阳黑子数、磁情指数三者之间的相关性，从而确定成果的取舍标准，同时应该优先采用夜间卫星经过的观测值，因为夜间太阳活动影响甚小，电子密度分布趋于稳定。

2. 对流层折射

非电离层由平流层和对流层所组成，离地面高度为 60 公里以下，大气折射的 80% 是由于对流层折射所引起的。对流层的折射系数大于 1，它是大气状态和卫星仰角的函数，而与卫星发射的频率无关。当卫星发射的信号穿过对流层时，电磁波的传播速度减慢了，从而压缩了信号的波长，影响到总的多普勒频移。这种折射影响不能象电离层折射改正那样，利用接收双频信号而检测出来，而只能根据地面的气象数据(即气压、水汽分压、温度等要素)和卫星仰角，按照大气垂直剖面的最佳模型，以求得折射改正的理论值，或者在观测工作中，避免或舍去卫星低仰角经过的多普勒数据，因为卫星处于地平附近即仰角为 0，其折射最大；在测站天顶附近即仰角为 90°，则折射误差最小或为零。因此在观测纲要中应该明确规定：卫星经过的仰角应该大于 10° 以上。

在此我们详细地介绍 Hopfield 模型的建立和 Willmann 模型的改进，同时列出 GEODOP 平差程序所采用的两种模型。

Hopfield 模型的建立

Hopfield 公式基于三个假定条件：第一，空气的折射率是高度的函数，而与水平位置无关；第二，根据地面气象要素能够预测空中垂直剖面的折射率；第三，在推导公式时，忽略了无线电信号弯曲路径的影响。为此曾经采用了大量气象气球对高、低空垂直剖面的折射率进行探测实验，按照最小二乘法拟合出折射改正的最佳模式。实践证明上述三个假定条件，在正常大气状态下基本上是正确的，所推导的公式对中纬度大陆性气候也是适用的，多普勒数据经过该公式修正后，在 SAGA 中引进折射尺度改正的待定系数，其平差后的改正量也是十分微小的。下面介绍公式的推导过程。

从测站到卫星的近似距离为 $\int nds$，这里 n 为介质中的折射系数，是沿着路径的位置而变化的，如果忽视非大气误差，则所观测的多普勒频移为：

$$\Delta f_{obs} = -\frac{f}{c}\frac{d}{dt}\int nds \tag{7}$$

在真空中的多普勒频率为：

$$\Delta f = -\frac{f}{c}\frac{d\rho}{dt} \tag{8}$$

式中 ρ 表示测站到卫星的几何倾距。

$$\Delta s = \int_P nds - \int_G ds \tag{9}$$

式中 $\int_P nds$ 表示信号的传播路径，$\int_G ds$ 表示几何直线路径。用 $\int_G nds$ 代替 $\int_P nds$，对 Δs 而言其二阶影响为 10%。

$$\Delta s = \int (n-1)ds$$

如图 3 所示。

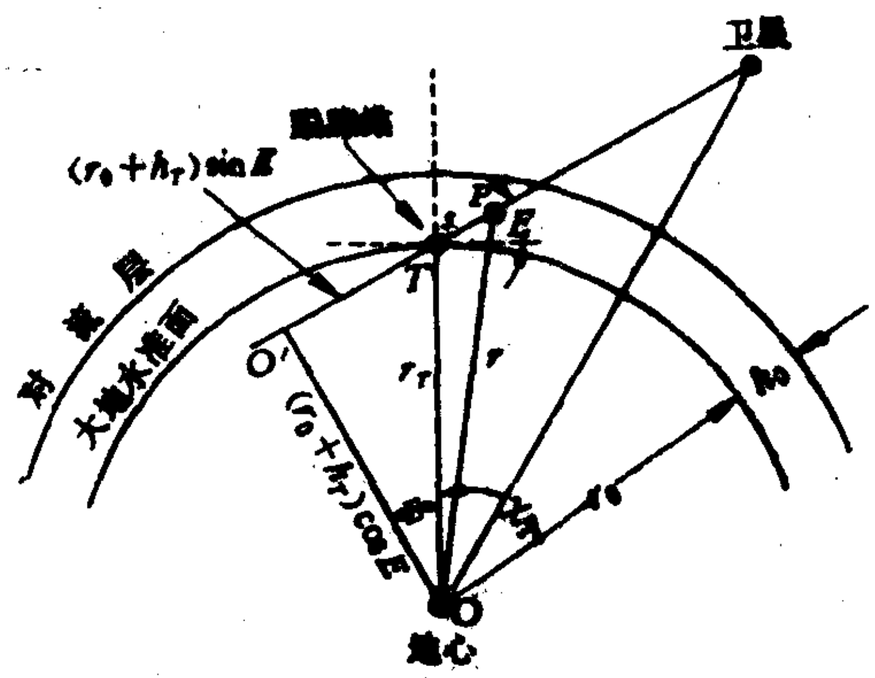


图 3

r_0 为大地水准面半径； h_0 大气的等值高度； r 为任意点 P 的径向距离； h_T 为测站的大地水准面以上的高度； $r_T = r_0 + h_T$， $TP \doteq s$； E 为仰角(亦称高度角)。

$$\Delta s = \int_{r_0+h_T}^{r_0+h_0} (n-1)\frac{ds}{dr}\cdot dr \tag{10}$$

折射率为 $N = (n-1)\times 10^6$

则

$$\Delta s = \int_{r_0+h_T}^{r_0+h_0} 10^{-6} N \frac{ds}{dr}\cdot dr \tag{11}$$

对流层折射对多普勒频移的影响为：

$$\Delta f_{tro} = -\frac{f}{c}\frac{d}{dt}\Delta s \tag{12}$$

把(11)式代入(12)即可得

$$\Delta f_{tro} = -10^{-6}\frac{f}{c}\int_{r_0+h_T}^{r_0+h_0} N\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ds}{dr}\right)dr \tag{13}$$

公式(13)为对流层折射对多普勒频移改正的基本公式。

空气的折射率可以分为“干”、“湿”两个分量之和，即

$$\left.\begin{aligned} N &= N_d + N_w \\ N_d &= 77.6P/T_K \\ N_w &= 77.6(4810e)/T_K^2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中 P 为大气压(以毫巴计算)；

e 为水汽分压(以毫巴计算)；

T_K 为绝对温度。

干燥分量是有规律可预测的，必须首先研究。

对干燥大气来说，在高度很低时，重力加速度 g 可认为常数，则气压为

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{g}{R}\int_0^h \frac{dh}{T}\right\} \tag{15}$$

式中 P_0 为地表气压(即大地水准面上气压)；R 为气体常数。

假定温度的垂直梯度 α 是一个常数 $(\alpha = -dT/dh)$ 则

$$T = T_0 - \alpha h \tag{16}$$

在(15)式中变换 T 并作积分即

$$P = P_0\left(\frac{T_0 - \alpha h}{T_0}\right)^{g/R\alpha} \tag{17}$$

把(16)、(17)代入(14)中的干燥分量，简化为：

$$N_d = N_{0d}\left(\frac{T_0 - \alpha h}{T_0}\right)^{(g/R\alpha)-1}$$

变换为

$$N_d = N_{0d}\left[\frac{T_0/\alpha - h}{T_0/\alpha}\right]^{\mu} \tag{18}$$

式中

$$\mu = (g/R\alpha) - 1 \tag{19}$$

N_{0d} 为大地水准面上的折射率。

Hopfield 根据实际情况选择了四次方 N_d 分布，如图 4 所示。$\mu = 4$，则 $\alpha = 6.7$℃/公里，根据测站气象数据，由 (18) 式可得到任何地方 (不必在大地水准面上)的 N_d 分布公式为：

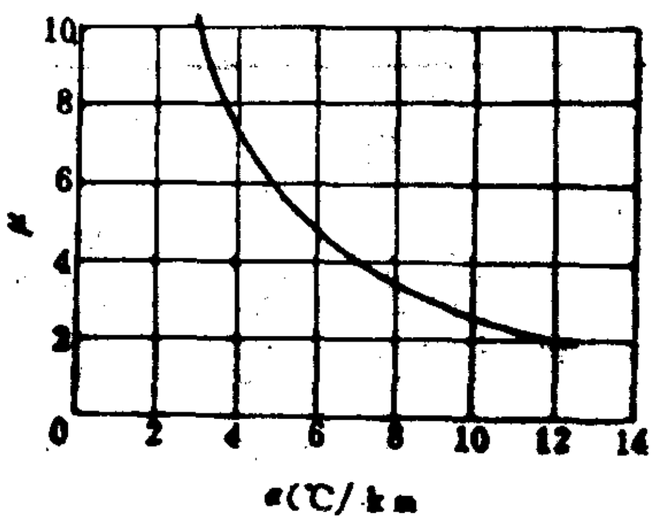


图 4

$$\left.\begin{aligned} N_d &= \frac{N_{Td}}{(h_{0d} - h_T)^4}(h_{0d} - h)^4 && h \leqslant h_{0d} \\ N_d &= 0 && h > h_{0d} \\ N_w &= \frac{N_{Tw}}{(h_{0w} - h_T)^4}(h_{0w} - h)^4 && h \leqslant h_{0w} \\ N_w &= 0 && h > h_{0w} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

总折射率为：

$$N = N_d + N_w.$$

为了求出等值高度 h_{0d} 和 h_{0w} 必须将上式(20)求积分，可以得到：

$$\left.\begin{aligned} \int_{h_T}^{h_{0d}} N_d dh &= \frac{N_{Td}(h_{0d} - h_T)}{5} \\ \int_{h_T}^{h_{0w}} N_w dh &= \frac{N_{Tw}(h_{0w} - h_T)}{5} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\int_0^{h_{0d}} N dh = \frac{1}{5}[N_{Td}(h_{0d} - h_T) + N_{Tw}(h_{0w} - h_T)]$$

Hopfield 根据(20)，(21)式作了两项有意义的试验：

第一，理论的四次方函数与观测数据十分吻合，这说明所选择的模型是最佳的。根据气象气球数据表明：大气表面任一恒定高度是纬度的函数，因此采用最小二乘法对 $\int Ndh$ 的理论值和观测值相拟合，求出赤道和不同纬度的 h_{0d} 和 h_{0w}，假定作一次近似

$$h_{0d} = h_{0d(eq)} + A_d \sin^2\varphi_T \tag{22}$$

式中 $h_{0d}(eq)$ 为在赤道上的干燥分量高度;

A_d 为随纬度变化的幅度;

φ_T 为测站纬度,

在平差中把 h_{0w} 作为已知值(即假定值),可以求出四次方N分布的高度参数为:

表 2

h_{0w} (公里)	$h_{0d(eq)}$ (公里)	A_d (公里)
10	43.858	−5.986
13	43.130	−5.206
14	42.402	−4.426
平 均 12.3	43.130	−5.206

(22)式可写为:

$$h_{0d} = 43.130 - 5.206\sin^2\varphi_T \quad (\text{公里}) \tag{23}$$

这说明在赤道上 h_{0d} 最大,在两极 h_{0d} 最小。

第二,根据气象气球测出不同高度的数据——高度、温度、气压、相对湿度,按公式(14)计算出干、湿大气的 N_d 和 N_w. 首先假定 h_{0d} 和 h_{0w} 为常数,用(21)式计算 $\int N_d dh$ 和 $\int N_w d_h$, 按最小二乘法解出 h_{0d} 和 h_{0w}.

实验结果: 在 1963—1967 年期间,测站高度为 10—100 米,φ 为 34°N—8°S, λ 为 14°24′W—120°34′W 的十个测站上观测气象资料,求出:

h_{0d} (公里) 为 42.06—44.19, 预测误差(理论值减去观测值)以中误差计算为 1.5—8 厘米。

h_{0w} (公里)为 8.64—11.46, 预测误差为 2—5 厘米。

其次假定 h_{0d} 和 h_{0w} 是变化的,它们随温度呈线性变化,其表达式为

$$h_{0d} = h_{00d} + a_d T_C \tag{24}$$

式中 h_{00d} 表示地面温度为 0℃ 时的等值高度以公里计,

a_d 表示温度系数,

T_C 表示摄氏温度。

用最小二乘法解称为:

$$\left.\begin{aligned} h_{0d} &= 40.082 \text{ (公里)} + 0.14898 \text{ (公里/℃)}\, T_C \\ h_{0w} &= h_{00w} + a_w T_C \\ h_{0w} &= 13.268 \text{ (公里)} - 0.09796 \text{ (公里/℃)}\, T_C \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

在公式(21)中,干燥分量的积分 $\int N_d dh$ 是比较大,且是比较稳定的,占总的 $\int N dh$ 中的 90%, 反映了较小的季节变化和天气影响。 在赤道上 h_{0d} 为 44 公里, $\varphi = 45°$, h_{0d} 为 41.5 公里,地表温度 $T_C = 0$ 时, h_{0d} 为 40.082 ± 0.078 公里,地表温度每变化 1℃, 则高度增加 149 米。潮湿分量产生了季节变化,在总的 $\int N dh$ 中占小部分, 反映了短期变化大,在解算方程式未知数时, h_{0w} 在不同测站、不同年份差别较大,占有 10% 的误差,影

响到对流层折射改正不到 1%，a_w 符号也不是始终保持相同的。

下面重点推导 Hopfield 对流层折射对多普勒频移的严密公式。

根据公式(10)—(13),改正值的理论表达式为:

$$\Delta f_{tro} = -\frac{f}{c}\frac{\partial(\Delta\rho_{tro})}{\partial E}\dot{E} \tag{26}$$

上式 E 为测站到卫星的仰角;

$\dot{E}$ 为仰角的时间导数,即 $\frac{dE}{dt}$

从图 3 中可以看出：在 $\Delta PO'O$ 中

$$PO' = [r^2 - (r_0 + h_T)^2\cos^2 E]^{1/2}$$

$$s = PO' - TO' = PO' - (r_0 + h_T)\sin E$$

对 s 微分

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{[r^2 - (r_0 + h_T)^2\cos^2 E]^{1/2}} \tag{27}$$

令 r_T 为地心到测站距离;

r_{tro} 为地心到对流层(干、湿分量)顶部的距离;

$$h_{troi} = h_{0i} - h_T;$$

$$r_{troi} = r_T + h_{troi} = r_0 + h_{0i};$$

$$l_1 = r_T\sin E \text{ (即 } TO' \text{ 边)};$$

$$l_2 = r_T\cos E \text{ (即 } OO' \text{ 边)};$$

$$l_{3i} = (r_{troi}^2 + l_2^2)^{1/2}.$$

把公式(21)和(27)代入折射改正的基本方程式(13)中,对于指定测站高度和对流层高度(可按公式(25)计算)来说,则对流层折射对多普勒频移的影响为:

$$\Delta f_{tro} = 10^{-6}\frac{f}{c}r_T\dot{E}\sum_{i=d,w}[N_{Ti}F_{4i}(E)] \tag{28}$$

对任一分量的函数值 $F_{4i}(E)$ (下标"4"表示四次方 N 分布)为:

$$F_{4i}(E) = \cos E\left\{1 + \frac{4l_1}{h_{troi}^4}\left[\frac{l_{3i}^3 - l_1^3}{3} + l_{3i}\left(l_2^2 + \frac{3r_{troi}^2}{2}\right)\right.\right.$$

$$-l_1\left(l_2^2 - \frac{3r_Tr_{troi}}{2} + 3r_{troi}^2\right)$$

$$\left.\left.+\left(\frac{3r_{troi}l_2^2}{2} + r_{troi}^3\right)\ln\frac{r_T + l_1}{r_{tros} + l_{3i}}\right]\right\} \tag{29}$$

从上式中可以看出，当 $E = 0°$ 时，$F_{4i}(E) > 1$；当 $E = 90°$ 时，$F_{4i}(E) = 0$. 如果 h_0 为必要条件,从(28)(29)式中可以计算出在任何卫星经过时,以时间为函数的 Δf_{tro}。N_T 取自地面气象数据,卫星高度角 E 和以时间为函数的卫星高度角变率 $\frac{dE}{dt}$，可以从卫星的初步轨道中计算出来。

从图 5 可以看出，已知卫星在轨道上的角速度 ω_t 和高度角 E 可以求出:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega\cos E\sin(E + \chi_s)\cos\chi_c\sin\omega_t}{\sin\chi_s} \tag{30}$$

对流层折射对斜距的影响，通过输入数据可以计算 $\int(n-1)d\rho$，在此假定路径弯曲被忽视，给出了"干""湿"分量的作用的总和为：

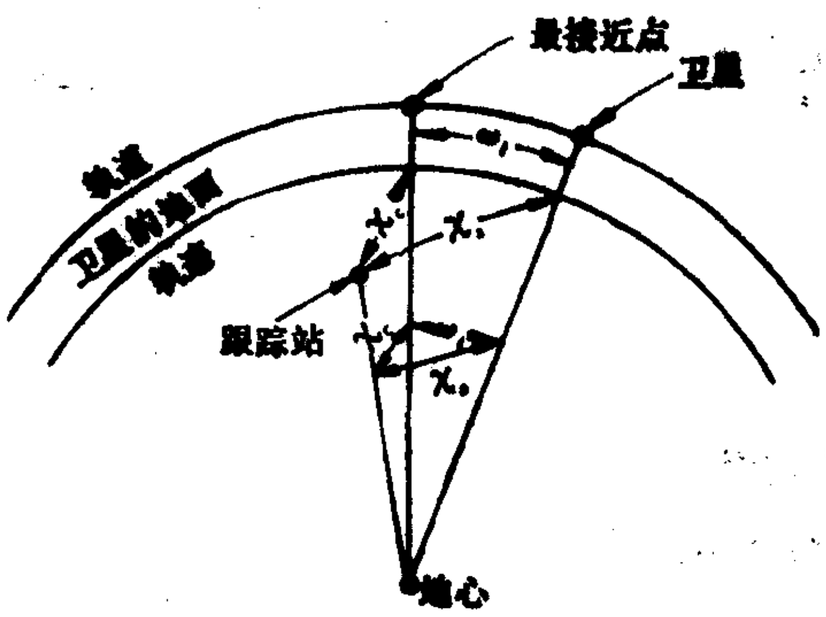


图 5

$$\Delta\rho_{tro}=\sum_{i=d,\,w}\Delta p$$

这里

$$\Delta p_i=10^{-6}N_{Ti}\left\{-l_1+\frac{4}{h^4_{troi}}\left[\frac{1}{3}r_T^2l_1^3-\frac{2}{15}l_1^5-\frac{3}{4}r_Tr_{troi}l_1\left(l_1^2+\frac{1}{2}l_2^2\right)+r_{troi}^2l_1^3-\frac{1}{2}r_{troi}^3r_Tl_1-\frac{1}{3}r_{troi}^2l_{3i}^3+\frac{2}{15}l_{3i}^5+\frac{3}{4}r_{troi}^2\left(l_{3i}^3+\frac{1}{2}l_{3i}l_2^2\right)-r_{troi}^2l_{3i}\left(l_{3i}^2-\frac{1}{2}r_{troi}^2\right)+\frac{1}{2}r_{troi}l_2^2\left(\frac{3}{4}l_2^2+r_{troi}^2\right)\ln\frac{r_T+l_1}{r_{troi}+l_{3i}}\right]\right\}\tag{31}$$

上述公式 (28)—(31) 表示了 Hopfield 对流层折射改正的严密公式即 1969 年公式，在国际卫星大地测量工作中被公认为最佳模型而普遍利用[10,14]。

Willmann 模型的改进[9,15]

Brown 曾在 1969 年卫星观测短弧大地测量平差（SAGA）的计算方案中，利用了 J. Willmann 所建议的对流层折射改正公式为：

$$\Delta r=\frac{2(n_0-1)H_0}{\sin E+\left(\sin^2E+\frac{4H_0}{r_0}\right)^{1/2}}\tag{32}$$

$$H_0=29.2(T_0-30)$$

$$r_0=\frac{a(1-e^2)^{1/2}}{1-e^2\sin^2\varphi}\tag{33}$$

$$n_0=1+10^{-6}(N_d+N_w)\tag{34}$$

$$N_d=77.6\frac{P_0}{T_0}\tag{35}$$

$$N_w=3.73\times10^5\frac{e_0}{T_0^2}\tag{36}$$

$$e_0=6.11R\times10^{7.5(T_0-273.3)}/(T_0-35.8)\tag{37}$$

上式中：Δr 为对流层折射的距离改正；

E 为卫星仰角；

n_0 为地面的折射系数；

H_0 为地面的大气尺度高；

r_0 为地球的曲率半径(以米计算)；

T_0 为绝对温度；

R 为相对湿度。

Willmann 公式的主要优点是简单化，对低仰角保持一定的精度，采用上述公式，可以消除 90% 到 95% 的折射影响，剩余折射影响为 5—10%，在天顶附近相当于 0.15—0.20 米，随着仰角的减小，剩余折射影响逐渐增大，当 $E = 15°$ 时，其值为 1 米，因此在 SAGA 中作为折射的初步改正。深入研究 Willmann 的公式后可以认为：公式 (32) 的分子即 $2(n_0 - 1)H_0$ 为最佳值改正，而公式的主要弱点是在大气尺度高 H_0 的采用值上。

为了使 Willmann 的尺度高与 Marini，Hopfield 两者进行比较，下面列出三种尺度高的公式表：

表 3

各类尺度高	公式
模型 I Willmann	$H_0 = 29.2(T_0 - 30)$
模型 II Marini	$H_0 = 10^3/\ln\left\{\frac{N_0}{N_0 - 7.32e^{0.005577N_0}}\right\}$ $N_0 = 10^6(n_0 - 1)$
模型 III Hopfield	$H_0 = (a + b)/N_0$ $a = N_d(h_d - h_T)/5$ $b = N_w(h_w - h_T)/5$ $h_d = 40082 + 148.98(T_0 - 273.15)$ (米) $h_w = 11500$ (米)

Brown 作了实际的大气测高和试算，证明了模型 III 的结果比其他两种好，在仰角 10° 时，模型 I，II 的均方根差为 1.294 和 1.366 米，两者比模型 III 的均方根差为 0.070 米要大 20 倍，因此 Hopfield 的尺度高最优，在 Willmann 公式中采用 Hopfield 的尺度高可以消除折射影响达 99%，可望达到厘米级。Brown (1973) 指出：在 SAGA 中采用 Hopfield 尺度高是对 Willmann 公式的有效改进，同时大大简化了计算，其综合改正式请参阅文献[1]，在此我们推荐采用这一公式。

Kouba 在加拿大 GEODOP 平差程序中推荐了两种对流层折射改正公式即：① Hopfield 简化模型为：

$$\Delta r \text{ (米)} = k_d \csc\sqrt{E^2 + 6.25} + k_w \csc\sqrt{E^2 + 2.25}$$

式中

$$k_d = 77.6\frac{P}{T}[40136 + 148.72(T - 273.16)] \times 2 \times 10^{-7}$$

$$k_w = 77.6\frac{4810e}{T^2}(11000) \times 2 \times 10^{-7}$$

上述公式已被国内有关单位所采用。②简化后的 Saatamoinen 模型为：

$$\Delta r \text{ (米)} = 0.002277 \sec Z\left[P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05\right)e - a\tan^2 Z\right]$$

式中 $Z = 90 - E - \Delta Z$

$$\Delta Z = \frac{16''.00}{T}\tan Z\left(P + \frac{4810}{T}e\right)$$

$e = 1.16 - 0.15 \times 10^{-3}h + 0.716 \times 10^{-8}h^2$，$h$ 为测站高度(米)。

就对流层折射对距离改正来说，积分多普勒计数 N_{ij} 的改正关系式为：

$$\overline{N_{ij}} = N_{ij} + [\Delta r(E_i) - \Delta r(E_j)]/\lambda$$

式中 E_i 和 E_j 为积分间隔开始和结束时的卫星仰角，

λ 为 400 兆赫载频的真空波长(其值为 0.75 米)。

由于对流层折射改正是地面大气状态和仰角的函数，在低仰角 (0—10°) 经过折射改正后，数据不呈随机变化，而是系统地分布于水平线的一侧，这说明折射改正对低仰角来说剩余影响甚大，因此在观测纲要中，不能使用 10° 以下的多普勒计数。另外必须注意：上述一切模型是建立在正常高空大气状态的基础上，当反常气候如冷、热气象锋面在观测期间经过测站上空时，将严重干扰多普勒观测结果，为此必须向气象站索取当天的气象资料，在分析数据时，剔除这部分成果以保证观测的可靠性。

三、接收误差

接收误差涉及到接收机本身、本机振荡器以及天线等全部影响。Kouba[3,17,18] 对仪器噪声深入研究后认为，严重影响多普勒定位精度的误差是恒定的或缓慢变化的仪器误差、地面反射以及天线相位中心的不可靠性，这些误差使定位结果相差若干米。Stansell[16] 从多普勒接收机的设计参数出发，讨论了本机振荡器的稳定性、接收机延迟、多普勒的计数精度、时间恢复的颤抖以及本机的分辨力等，并推估了这些参数对测量精度的影响。研究接收误差的目的是为了在 SAGA 中引入待定系数，建立合理的误差模型，同时在观测纲要中，采取必要措施以削弱这类误差影响，现分几个细目讨论。

1. 时标的选取

在积分多普勒测量中，积分的时间标准 (简称时标) 大体可分为两种：即接收机内恢复的卫星时标 t 和本机时标 T。不论采用什么时标其目的是测量出精密的时间间隔和记录相应的多普勒计数，为此接收机采取了三种形式：(1) 利用本机信号发生器所产生的时标作为计数间隔，如 Marconri 仪器；(2) 根据卫星信号调制一定形式认别后，接收机提供钟的读出，如 JMR 型；(3) 在计数周期结束时，接收机提供钟的读出，如大地接收机型和 MX1502 型，接收机的信号发生器和本机钟都由内部 5 兆赫振荡器所启动的。

积分多普勒测量可用下式表示：

$$N_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i}(f_G - f_R)\,dt \tag{38}$$

式中 N_i 为多普勒计数；

t_{i-1} 为第一周开始的精确时间；

t_i 为最后一周结束的精确时间；

f_G 为本机振荡器的参考频率 (400 兆赫)；

f_R 为被接收的瞬间频率；

$f_R = f_s + f_D$，f_s 为卫星射频（399.968 兆赫）；

$f_D = -\frac{f_s}{c}\frac{dR(t)}{dt}$，$f_D$ 为多普勒频移。

$$t_j' = t_j + \Delta t_j^c + \Delta t_j^q. \tag{39}$$

式中 t_j' 为接收机的数字钟所记录的时间；

Δt_j^c 为时间 t_j 的钟的初始时间误差；

Δt_j^q 为由于量子化所产生的钟的读出误差。

$$t_j = t_j^s + \Delta t_j^p + \Delta t^r + \Delta t_j^c + \Delta t_j^q \tag{40}$$

式中 t_j^s 为从卫星上发射的第 j 个记时信号的时刻；

Δt_j^p 为卫星到接收天线之间的传播时间延迟；

Δt^r 为接收机内的时间延迟；

Δt_j^c 为随机的时间恢复颤抖（jitter）；

Δt_j^q 为从时标的认别到最后多普勒计数完毕之间的时间随机延迟。

从公式(38)可见，对于 $f_G = 400$ 兆赫来说，f_D 为 ±8 千赫，因此 $f_G - f_R = 32 \pm 8$ 千赫，其差频范围为 24—40 千赫，在时间区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 内，进行多普勒计数。

公式(39)表示了记录时间不同于真实时间，钟的初始时间误差和钟的量化误差两者影响甚小，最新的接收机的量化时间在 0.5 微秒范围内。

公式(40)表示了各个多普勒计数的真实的开始和结束的准确时间是一系列变量的函数，因此接收机的恢复卫星时标是一个变化的不等间隔的时标，现逐项加以说明：

公式(40)右边第二项 Δt_j^p 为卫星射频的传播时延，其公式为 $\Delta t_j^p = \frac{R_j}{c}$，在卫星最接近点处为 3.3 毫秒，在低仰角处为 13 毫秒左右，这项误差在基本公式

$$N_1 = \int_{t_1'+R_1/c}^{t_2'+R_2/c} (f_G - f_R)\,dt,$$

$$N_1 = (f_G - f_s)(t_2' - t_1') + (f_G/c)(R_2 - R_1) \tag{41}$$

中已经顾及，(41)式是考虑误差影响的出发公式。

第三项 Δt^r 为接收机的延迟，根据不同接收机类型而定，Magnavox 厂的接收机的额定值为 50—700 微秒，马可尼厂接收机为 500—1500 微秒，延迟的标称值为 100 微秒，这项误差可以从实验室内测试出来，可视为静态延迟指标。

第四项 Δt_j^c 为随机时间恢复颤抖，即延迟额定值的波动，其量级为 30—50 微秒范围内，最大可达 75—125 微秒，引起多普勒计数误差为 3—9 周，相当于最大的倾距误差为 7 米，Δt_j^c 可视为动态延迟指标。

第五项 Δt_j^q 为时标的认别和完成最后计数之间的延迟。Kouba 认为：积分初始时间实际上出现在下一次由正过零的交叉多普勒拍频，其进一步延迟为 45 微秒，跟踪滤波器瞬间超前或落后所引起多普勒信号延迟达 10 微秒。

近几年来各国多普勒接收机都作了重大改进。例如马可尼厂仪器不是采用接收机恢复的卫星时标，而是利用本机振荡器的数字钟，同步锁住卫星初始时标后，多普勒计数就不受真实的(比特速率)卫星时标所控制，而是按本机钟所产生的“恒定比特速率”的时标

来计数，这种时标称为本机时标 T，这样消除了接收机的时间延迟和颤抖的影响，或者像 MX1502 仪器那样利用本机钟测量卫星时标到前方整周的时间即称前伸时间，标称时间加上前伸时间，可得精确的积分时间，由此引起定位误差可达 0.1—0.3 米 (1σ)。

2. 振荡器的稳定度

Transit 卫星和接收机都具有高稳定性的晶体振荡器作为频率标准，衡量标频的两项主要技术参数是老化率和短期稳定度，前者相当于频漂 f，而频偏 Δf 相当于 32 千赫差频的准确度，在 SAGA 中引进了这两个量作为待定系数解算。

Transit 卫星的振荡器具有 $1—3 \times 10^{-11}$/日的稳定度，地面注入站经常校准卫星上的标频，并在每帧电文的第 134 个字中发播了卫星上标频的偏离值。

本机振荡器的频率稳定度对多普勒测量关系甚大，为了估算其影响，首先采用 $dN = \frac{f_G}{c} d\Delta R$ 公式(根据(41)式微分)，当计数误差为 1 周时，则距离误差(亦称测量噪声)可达 75 厘米，近似为 1 米，下面讨论误差时都以厘米计量。

Stansell 以 Austron 型 1150 晶体振荡器的技术指标为例说明频率老化率和稳定度对倾距的变化影响。

表 4 Austron 型 1150 晶体振荡器技术指标

老 化 率	5×10^{-10}	24 小时后每天速率
	1×10^{-10}	30 天工作后每天速率
	5×10^{-11}	90 天后每天速率
稳 定 度	对于 120 秒取平均时间小于 $\pm2\times10^{-11}$ (均方根)	
	对于 1 秒取平均时间小于 $\pm1\times10^{-11}$ (均方根)	
	对 27 伏直流电压变化 10%，小于 $\pm5\times10^{-10}$	
	从 −55℃ 变化到 +60℃ 总共小于 2×10^{-9}	

必须保持非常稳定的电源电压和避免突然的温度变化，以达到振荡器所固有的特性。如果电源电压有 1% 的变化，即可引起 5×10^{-11} 频率变化。为了估算振荡器频率变化对斜距的影响，必须把不同的频率稳定度变换到 15 分钟卫星经过时的标称值。如果在一天内老化率是恒定的，则其影响为：

表 5 频率的漂移对倾距变化影响

老 化 率	对 倾 距 变 化 影 响
1×10^{-9}/每天	140 厘米
5×10^{-10}/每天	70 厘米
1×10^{-10}/每天	14 厘米
5×10^{-11}/每天	7 厘米

标频的老化率是随时间按线性单方向漂移的，时间愈长愈趋于稳定。一般来说，老化率是不恒定的，在一天内，频漂的变化是在 24 小时变化速率平均值的上下波动，定位精度取决于 15 分钟的观测时段内的漂移速率。缓慢的频漂是隐伏的，对多普勒测量的残差影响甚小，而短期频漂的随机变化则对残差影响较大，但对定位结果影响甚微。

在 15 分钟内，假定采样时间为 100 秒，随机频率稳定度对斜距变化的影响为：

表 6

短期稳定度 (100 秒取平均)	对倾距变化影响
1×10^{-11} (均方根)	90 厘米
5×10^{-12} (均方根)	45 厘米
1×10^{-12} (均方根)	9 厘米

以频率随机变化的 3 倍均方根估算，即为最大估计。

由于频率标准内存在着各种电噪声，对输出信号寄生调频调相，使频率值产生随机起伏，这种起伏可用方差来描述，采样时间短则称为短期稳定度。因此在观测纲要中应该明确规定：在测量出发前，首先应该启动本机振荡器，经过半月以上的运行逐步稳定后，方能开始外业工作。迁站时应利用接收机内部电源保持振荡器工作，其次要保持内、外电源的电压稳定。

如果接收机的振荡器的短期稳定度为 5×10^{-12} (以 1σ 计)，对文献[1]提出的近似 100 秒的积分间隔来说，引起倾距误差在 0.15 米左右。

3. 接收机噪声源

除了上述误差因素外，精密的多普勒测量技术与本机振荡器具有同等重要。公式(40)中的 Δt_j^c 和 Δt_j^d 两项随机误差项，直接影响到计数的真实开始和终止的时间，由此引起的多普勒计数的测量噪声为 150—225 厘米，对精密定位是不容忽视的，然而采用本机时标或本机钟测量各个多普勒计数的精确时间间隔，这项误差是可以削弱的。公式(39)中的 Δt_j^q 钟的读出量化误差项，新型的接收机具有 ±0.5 微秒的量化精度。由此产生均方根差为 0.86 厘米。

接收机内的时间延迟 Δt^r，取决于接收机的类型，延迟的绝对量级是无关重要的，而主要特征是它的稳定性，一台好的接收机设备必须在很宽的温度范围内长期保持恒定的延迟，引起延迟的原因是窄频带滤波器的相位倾斜特性和在时间恢复回路的偏置电压所致。

窄频带锁相回路跟踪卫星信号，以得到多普勒频率的测量，即使是很窄的滤波器也受到信噪比的影响，在临界信号水平时，回路中断锁相，噪声的颤抖为 5.5 厘米(均方根)，对于10 分贝的强信号，噪声颤抖减到 1.9 厘米(均方根)，这样各个多普勒计数产生的噪声为 2.65 厘米。

4. 天线的相位中心问题

使用一副好的天线对最佳接收多普勒频移提高定位精度是不可缺少的。天线的重要特征是要求两个频率上的天线相位中心是相重合的，一般来说，要达到这种要求是困难的。另一特性是天线的灵敏度，要求天线必须充分地聚集入射的能量，这种特征称为俘获范围。测量天线还要求容易装卸并能经得起温度大幅度变化和狂风等恶劣天气的袭击。

Kouba[17] 就多普勒水准测量问题，论述了天线的相位中心问题，他指出：测站的位置

被认为是一点 $\bar{r}_e$，可由下列公式求得：

$$\bar{r}_e = \bar{r}_1 - (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\lambda^2/(1-\lambda^2) \tag{42}$$

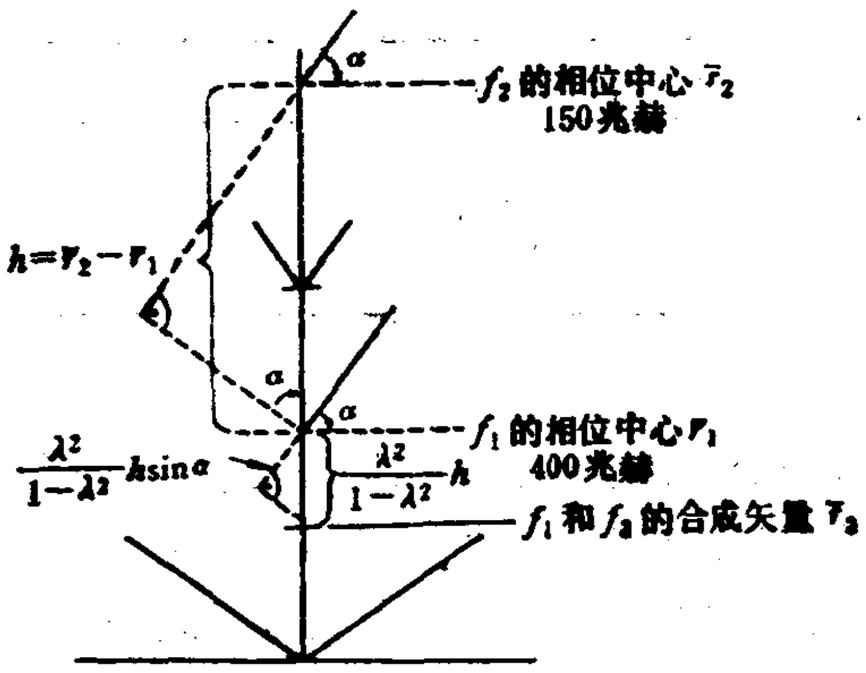


图 6

如图 6 所示：

$\bar{r}_1$ 为频率 f_1（400 兆赫）的天线相位中心的位置矢量；

$\bar{r}_2$ 为频率 f_2（150 兆赫）的位置矢量；

$\lambda = f_2/f_1$（对双频 150/400 兆赫来说，等于 3/8）。这意味着双频合成参考点的高度离开 f_1 的相位中心为

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\lambda^2/(1-\lambda^2) \tag{43}$$

亦可写为

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \frac{9}{55} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times 0.16 \tag{44}$$

这种情况也适合于轻便的多普勒接收机系统所采用的同轴天线。

实际上频率 f_1 和 f_2 的相位中心不是恒定的，卫星多次经过和单次经过期间天线相位中心的变化取决于卫星的仰角、信号强度、地面状况以及天线在地面以上所移动的高度（不同的测站、这些因素也不同）。由于仰角的变化引起相位中心的变化，反映在数据的噪声里，信号强度的变化引起测站高度的偏差，相位中心的移动起因于地面以上天线的高度变化。

Wells 曾经提出了在改变卫星仰角和不同的天线高度情况下，测定 150 和 400 兆赫的相位中心高度的报告，他采用了 ITT 型设备的天线和 Magnavox 设备的早期天线 CHU。所计算的相位中心高度是采用最小二乘法拟合到所观测的相位中心高度而求得的，试验表明：①频率 f_1（400 兆赫）的相位中心，对于 10—60° 仰角之间的接收数据是比较平稳的，占拦截卫星数据的 90%，当仰角在 70—90° 时，直接信号强度接近于零，这时地面反射占优势，故数据变化非常明显。②从不同的天线高度来看，频率 f_1（400 兆赫）的平均相位中心变化在 0.15 米范围之内，而频率 f_2（150 兆赫）情况就比较复杂，在 10—60° 仰角之间，ITT 的天线相位中心变化 0.5 米，对于 CHU 天线变化到 3 米，f_1 和 f_2 两相位中心的平均间隔取决于地面以上的天线高度。③ f_1 与 f_2 相比较，f_2 相位中心的任意位移对合成矢量 $\bar{r}_e$ 是不灵敏的，因为 f_2 相位中心位移所引起的误差应乘以 $\lambda^2/(1-\lambda^2) = 0.16$。假定双频相位中心的间隔 h 为 0.5 米（1σ）精度，则单次经过由于相位中心不准确所引起的高度测定的综合误差（σ）为 0.2 米，如果天线设计进一步改进，对于 10—60° 仰角的多普勒观测来说，相位中心高度的影响可望减到 0.1 米。

根据上述分析，我们认为在观测纲要中应该明确规定：（1）必须观测仰角为 10—70° 之间的卫星，理由是剔除 0—10° 范围的观测，以削弱对流层折射的较大影响；剔除 70—90° 范围的观测值，以削弱天线相位中心高度误差和地面反射对观测结果（特别是高程测定）的影响；（2）天线高度在各测站上应有统一规定，因故折去天线而需重新恢复观测时，应保持原规定的天线高度；（3）各副天线相位中心应作深入研究和试验，建立必要数据图表，（4）天线必须安置在仰角 10° 以上无障碍物的地方，避免靠近金属结构物、中程雷达

以及高功率通信天线所放射的大量射频能量。

参 考 文 献

[1] 周江文：多普勒观测网的数学处理，见本刊.

[2] Stansell, T. A., The Transit satellite Navigation System, Magnavox Gorernment and Industrial Electronics Company (1978), 1—80.

[3] Kouba, J., Wells, D. E., Semi-dynamical Doppler Satellite Positioning, *Bulletin Géodésique*, **50**, 1, (1976), 27—38.

[4] Anderle, R. J., Error model for geodetic positions derived from Doppler satellite observations, *Bulletin Géodésique*, **50**, 1, (1976), 43—75.

[5] Weiffenbach, G. C., Tropospheric and Ionospheric propagation Effects on Satallite Radio-Doppler Geodesy, Electromagnetic distance measurement, a Symposium, Hilder & watts Ltd., London, (1967), 339—351.

[6] Hopfield, H. S., The effect of Tropospheric Refraction on the Doppler shift of a satellite signal, *Journal of Geophysical Research*, **68**, 18, (1963), 5157—5161.

[7] Hopfield, H. S., Two-quartic Tropospheric Refractivity profile for correcting satellite Data, *Journal of Geophysical Research*, **74**, 18 (1969), 4487—4498.

[8] Hopfield, H. S., Tropospheric effect on electromagnetically measered range, Prediction from surface weather data, *Radio Science*, **6**, 3, (1971), 357—367.

[9] Brown, D. C., Trotter, J. E., Extensions of SAGA for the Geodetic Reduction of Doppler operations, AFCRL-TR-73-0177, AD-760791, (1973), 1—11.

[10] Henriksen, S. W. et al., National Geodetic Satellite Program, National Aeronautics and Space Administration Washington, NASA SP-365 (1977), 98—140.

[11] Bomford, C., Geodesy, Oxford University Press, Third edition, (1971), 398—407.

[12] Mass, J., and Vassy, E., Doppler effect of artificial Satellite, AD-275593, (1961), 1—39.

[13] F. S. 约翰逊编著，阮忠家、李再琨译：人造卫星环境手册，科学出版社，(1973)，1—21.

[14] Satellite Doppler positioning (Proceedings, International Geodetic Symposium), U. S. Defense Mapping Agency, National ocean survey, NOAA, Oct, (1976).

[15] Brown, D. C., and Trotter, J. E., SAGA A Computer program for short arc Geodetic Adjustment of Satellite observations, AFCRL-69-0080, AD-703556, (1969), 33—40.

[16] Stansell, T. A., Doppler survey equipment Background, Requirements and trends, Satellite Doppler positioning (Proceedings, International Geodetic Symposium), U. S. Defense Mapping Agency, National Ocean Survey, NOAA, (1976), 249—278.

[17] Kouba, J., Doppler Leveling, *The Canadian Surveyor*, **30**, 1, (1976), 21—32.

[18] Kouba, J., and Boal, J. D., Program GEODOP, Mathematical Adjustment Section, Geodetic Survey of Canada, Surveys and Mapping Branch, Dept. of Energy, Mines and Resources, (1975), 4.1—4.45.

ERROR ANALYSIS OF DOPPLER OBSERVATIONS

Song Wenyao

(*Institute of Geodesy and Geophysics Academia Sinica*)

Abstract

The error source of Doppler observation can be divided into three classes, i.e. error in the satellite orbit parameters, error of refraction and error resulting from the tracking receivers. In this paper, the physical cause of formation of the above-mentioned errors, orders of magnitude and ways to determine or weaken the errors are analysed. These will provide a theoretical basis for drawing up an operational plan of Doppler observation network.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

根据武昌时辰站等高仪观测结果推求 FK4 星的星位订正

中国科学院测量与地球物理研究所武昌时辰站*
南京大学天文学系**

提　　要

根据武昌时辰站等高仪在 1965 年 1 月到 1975 年 12 月期间的时纬观测结果推求 FK4 星的星位订正。星位订正的计算方法与其他同类型仪器的计算方法基本相同。根据分析的结果，我们加入了星序的改正，星等的改正及光谱型的改正；在计算组间差时加入了固体潮影响的改正。有 98 颗二次过等高圈的星和 80 颗一次过等高圈的星可用来求星位改正 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$，其中误差分别为 $\pm 0^s.002 \sim 0^s.007$，$\pm 0''.03 \sim 0''.13$。而其中绝大部份为 $\pm 0^s.003$，$\pm 0''.05$。最后分析了星位的系统改正 $\Delta\alpha_\alpha$，$\Delta\delta_\alpha$ 及 $\Delta\alpha_\delta$，$\Delta\delta_\delta$。

一、概　　况

中国科学院测量与地球物理研究所武昌时辰站等高仪（OPL No. 29）于 1963 年 3 月安装，1963 年 12 月进行了试测，并编制了观测纲要，1964 年开始正式观测，提供时间和纬度观测结果。

观测纲要计有 12 个星组，每一星组从恒星时偶数小时开始，并以拉丁字母顺序命名，依次为 A 组 (0^h—2^h)，B 组 (2^h—4^h)，……直到 L 组 (22^h—24^h)。总共 375 星次，其中 98颗为二次过等高圈的星，即实际星数为 277 颗。全部选自 FK4 星表。

通常每个晴晚观测两组，一月替换一组，一年完成一轮连锁观测。表 1 列出了纲要的 FK4 星号及二次通过等高圈星的所在星组及序号。表 2 列出各星组的观测月份。

用于计算星位改正的观测资料为自 1965 年 1 月起至 1975 年 12 月共计整 11 年。

对于作为计算星位改正基础的每一颗星的观测残差的选用有如下条件：

(1) 凡是时纬成果被采用的那组观测，其残差亦被采用。时纬成果被采用的条件仅仅是一组观测的丢星不超过纲要星数的 1/3，亦即不超过 10 颗，发生丢星的情况有两种，其一是没有被观测到，其二是该星的观测残差大于 0″.50 时。在计算星位改正时，后一情况得重新处理，要观察其有否系统性，如属于系统性，则是该星具有较大星位误差所引起。

(2) 在对每一年求同一星的残差之和时，只是个别残差值过大者舍去。其办法是：先

---

* 本项工作主要参加者：韩天芑、钱益明、李劲峰。

** 本项工作主要参加者：苗永宽、肖耐园、凌兆芬及天体测量专业 1977 届学员。

表1 各观测星组

编号	A		B		C		D		E		F	
	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈
1	878		1034	A 5	1093	B 5	1175	F 12	1169	C 6	1318	
2	60	B 21	150		225		1201		386	G 12	334	D 31
3	844	K 7	1004	L 2	99	A 22	175	B 23	384	G 9	1322	H 15
4	1054		17		1083		144	A 26	365	F 21	1316	H 6
5	1034	B 1	1093	C 1	75		147	A 28	379		305	
6	94	C 14	1104		1169	E 1	1117		221		466	
7	835	J 30	181		79		1125		1163	B 31	1323	
8	100	C 16	1005		1176	E 15	1225		1275	G 17	1302	G 18
9	1583		1137	D 24	1079	A 16	164		407	G 19	473	H 10
10	1082		183	D 23	89		1228	F 15	256		450	
11	1606	K 30	1030		274		1232	F 23	1249	F 13	1297	G 4
12	1614		56		121		201		378		314	D 1
13	111	C 24	25	L 10	269	E 20	292	E 14	1282		1249	E 11
14	892	L 8	184	D 20	94	A 6	312	E 30	292	D 13	326	
15	871		1145	D 30	230	D 18	335	F 19	1176	C 8	1228	D 10
16	1079	C 9	27		100	A 8	1140	B 20	280	C 29	456	G 28
17	852		1136		286		1239	F 22	394		1346	
18	862	K 10	202		1174		230	C 15	255		328	
19	2	L 21	1021		287		1244		422	G 24	335	D 15
20	114		1140	D 16	125	A 29	184	B 14	269	C 13	1246	
21	899		60	A 2	244	D 26	360		409	G 8	365	E 4
22	99	C 3	33		277	E 22	337		277	C 22	1239	D 17
23	870	K 13	175	D 3	237		183	B 10	398	F 32	1232	D 11
24	1072		1039		111	A 13	1137	B 9	1300		1328	
25	1625		42	L 14	294		1223	E 31	1190		1317	
26	144	D 4	1035		1207		244	C 21	279		358	D 29
27	139		179		124		1238		1224	D 32	346	
28	147	D 5	216		1118		192		441		1349	H 20
29	125	C 20	1050		280	E 16	358	F 26	1304		509	
30	890		218		131		1145	B 15	312	D 14	497	H 16
31	898		1163	E 7			334	F 2	1223	D 25	1368	
32			85				1224	E 27	1196		398	E 23

表2 纲要的

月份 \ 星组	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C
1	✓	✓											
2		✓	✓										
3			✓	✓									
4				✓	✓								
5					✓	✓							
6						✓	✓						

的 FK4 星 号

G		H		I		J		K		L	
FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈	FK4	二次过等高圈
1344		562	I 4	528	G 5	765		667	H24	1682	
535	I 15	1421	J 3	690	K 8	760		800	L 7	1004	B 3
1380		621		531		1421	H 2	815		768	J 17
1297	F 11	609		562	H 1	627	H 22	730	J 11	18	
528	I 1	626	J 19	522		1414	G 26	857		1521	
1272		1316	F 4	1459	J 8	1526		681		7	
540		582	I 16	705	K 21	780		844	A 3	800	K 2
409	E 21	1351	G 11	671		1459	I 6	690	I 2	892	A 14
384	E 3	1434	J 14	680	J 27	1442	H 21	684		774	
1372		473	F 9	713		1539		862	A 18	25	B 13
1351	H 8	488		703		730	K 4	843		1023	
386	E 2	461		719	K 25	618		869		902	
557		614		1498		749		870	A 23	1555	
390		470		534		1434	H 9	712	I 18	42	B 25
1396	I 23	1322	F 3	535	G 2	758	K 29	716	I 21	1534	
1276		497	F 30	582	H 7	677	I 19	834	L 24	1020	
1275	E 8	1429	I 30	598		768	L 3	725		1008	
1302	F 8	1332		712	K 14	1558	L 29	836	L 23	1032	
407	E 9	1460	J 29	677	J 16	626	H 5	726	I 27	1549	
423		1349	F 28	1395		655		880		1551	
1375	H 25	1442	J 9	716	K 15	1531	K 26	705	I 7	2	A 19
412		627	J 4	570	G 27	807		1616		1045	
580		633		1396	G 15	1454		745		836	K 18
422	E 19	667	K 1	740		1446		733		834	K 16
1397		1375	G 21	1400		641		719	I 12	804	
1414	J 5	1468		1476		1570	L 30	1531	J 21	793	
570	I 22	507		726	K 19	680	I 9	1622		52	
456	F 16	656		738		821		1603		64	
447		513		563		1460	H 19	758	J 15	1558	J 18
593				583		835	A 7	1606	A 11	1570	J 26
584				1429	H17			743		57	
484				568						1568	

观 测 时 间

星组 / 月份	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C
7							✓	✓					
8								✓	✓				
9									✓	✓			
10										✓	✓		
11											✓	✓	
12												✓	✓

不加取舍地对一年该星的全部观测残差求平均值，仅当个别残差值对该平均值之差大于0.″50，该次观测舍去。此次星位改正计算重新整理各星的观测残差所用的上述的所谓平均值，是取1965—1970年的六年结果的平均值为以后各年观测取舍的参考。

(3) 残差统计时不加权

观测数量见表3，4。

表3 星组的历年观测数

星组＼年份	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	总和
A	23	19	18	16	18	10	37	25	23	16	17	222
B	22	9	26	12	24	17	36	26	26	15	26	239
C	18	15	19	10	14	19	26	20	24	12	25	202
D	15	13	15	12	10	16	15	16	14	18	15	159
E	15	12	12	13	10	11	18	15	10	20	12	148
F	18	10	6	9	12	15	23	16	15	23	14	161
G	23	13	6	14	9	14	15	14	16	25	7	156
H	17	10	11	15	7	10	16	9	12	14	10	131
I	21	11	6	13	16	14	23	25	16	13	11	169
J	23	12	9	17	16	19	34	47	27	22	18	244
K	20	24	24	22	20	17	24	34	29	24	26	264
L	25	32	18	26	30	10	21	22	25	14	22	245
总和	240	180	170	179	186	172	288	269	237	216	203	2340

表4 各组星的观测次数

星序＼星组	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	197	205	178	131	97	130	124	108	130	220	125*	217
2	208	225	196	141	132	143	141	117	133	213	238	222
3	201	217	197	145	134	142	142	120	151	215	260	231
4	111*	229	185	148	144	151	139	125	134	220	252	231
5	208	220	197	150	148	147	145	126	145	227	256	228
6	212	209	189	156	145	138	133	119	114	223	253	237
7	215	237	197	148	145	156	133	119	144	236	255	234
8	212	226	188	146	143	156	133	117	142	228	247	224
9	213	235	155	156	138	152	149	122	149	232	219	234
10	205	232	172	157	144	154	143	123	158	224	254	236
11	198	222	183	154	137	147	142	127	152	216	253	212
12	210	232	197	151	143	156	148	122	142	232	259	234
13	117*	232	192	151	139	154	151	101	136	221	253	229
14	213	234	188	155	139	161	144	122	155	232	254	216
15	216	233	183	153	131	154	141	118	154	225	260	235
16	202	243	195	145	119	160	142	125	148	231	250	224
17	191	230	193	142	137	143	145	83	145	220	242	226
18	213	230	193	120	135	151	147	119	151	235	257	224
19	155	231	184	151	142	160	135	120	143	236	255	222

（续表 4）

星序 \ 星组	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
20	212	229	191	147	143	151	139	123	129	227	252	231
21	208	229	197	138	127	155	143	125	157	220	255	232
22	213	233	191	151	139	151	152	120	145	222	208	235
23	208	212	179	145	98	139	142	114	148	222	253	217
24	207	194	193	150	130	137	145	84*	141	206	248	229
25	174	233	189	153	134	146	137	115	128	233	224	231
26	195	237	185	142	144	148	143	104	142	209	231	213
27	205	229	181	139	144	135	150	115	153	230	241	233
28	212	209	164	137	145	147	143	121	132	221	249	233
29	207	170	142	154	139	150	145	117	148	219	247	221
30	209	216	191	143	137	155	141		149	217	229	201
31	190	226		147	139	144	143		103		246	227
32		216		138	140	137	146		140			217

* 于1971 年开始观测

二、残差统计

某 i 星的残差 v_i，由观测误差方程式求得，即

$$\cos\varphi_0 \sin A_i x + \cos A_i y - z + \delta h_i = v_i \qquad (1)$$

其中：$\varphi_0 = 30°32'28''.7$；

A_i 为 i 星过等高圈时的方位角；

x，y，z 分别为一组观测中按最小二乘法解算所得的钟差改正，纬度改正和天顶距改正。

残差统计就是求同一星在 11 年内所有观测所得的残差的平均值。

武昌等高仪的结果于 1973 年开始加入组内修平值，于 1974 年又重算了组内修平值，因此在 1973 年和 1974 年以后的结果中，为了计算星位改正的需要，应在各星残差中加回组内修平值。

1973 年起我国采用新的光行差常数，即由原来的 20″.47 改为 20″.496。要将 1965—1972 年期间用老光行差常数计算的恒星视位置算得的残差归算到新光行差常数系统中。

因光行差常数改变使星位产生的改正为：

$$\Delta\alpha = \Delta C c + \Delta D d$$
$$\Delta\delta = \Delta C' c' + \Delta D' d' \qquad (2)$$

按照等高观测计算公式，相应的高度角改正为

$$\Delta\delta h = -15\cos\varphi \sin A \Delta\alpha + \cos q \Delta\delta \qquad (3)$$

考虑到

$$v_i = D_i - z \qquad (4)$$
$$D_i = x_0 \sin A_i + y_0 \cos A_i + \delta h_i \qquad (5)$$
$$\Delta D_i = \Delta\delta h_i \qquad (6)$$

x_0, y_0 为 x, y 的近似值;由于

$$z = \frac{[D]}{n}; \quad \Delta z = \frac{[\Delta\delta h_i]}{n} \tag{7}$$

n 为一组星的观测星数,所以光行差常数变更带来的影响

$$\begin{aligned}\Delta Ab_i &= \Delta v_i = \Delta D_i - \Delta z \\ &= \Delta\delta h_i - \left[\frac{\Delta\delta h_i}{n}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

在各星组的平均观测时期内(见表 2),按每五天从《1972 中国天文年历》附表中查取 ΔC 和 ΔD,然后取五天的平均来计算 $\Delta\alpha_i$ 和 $\Delta\delta_i$。

表 5 1965—1975 年各星残差平均值(单位 0.″001)

星序 \ 星组	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	星序平均
1	− 45	−100	+ 10	−173	+167	−119	+41	− 33	− 91	+ 38	+ 75	+ 83	−12
2	−135	+ 9	− 16	+145	− 47	−116	+4	−117	− 48	− 44	+ 20	− 48	−33
3	+ 31	+141	+ 48	+ 79	− 67	+ 79	−93	− 27	− 46	− 8	+ 44	+ 46	+19
4	− 2	+ 65	+192	+ 77	− 47	− 60	−12	+ 7	+ 30	− 65	+ 55	− 66	+14
5	+ 78	+140	−119	− 18	− 85	+ 14	+141	+ 9	+ 25	− 4	+ 28	+ 17	+19
6	+ 54	+259	− 6	− 63	− 48	+145	+43	+124	− 20	−145	+ 85	− 48	+32
7	− 30	+ 13	− 6	+ 64	+ 58	+144	+139	+ 45	− 48	+ 94	+105	+ 23	+50
8	+137	+ 70	+ 19	+155	−128	+ 40	+168	+ 18	+155	− 69	+ 35	+ 91	+58
9	+ 37	+ 77	+310	+131	+ 74	+ 58	+4	− 75	+ 58	+ 26	+ 66	+ 50	+68
10	+111	− 7	+ 7	− 85	+ 39	− 92	+31	+ 7	+ 28	+108	− 21	− 20	+ 9
11	+118	−223	+ 55	+ 88	−129	−120	+27	+189	+ 22	+ 87	+ 28	+ 19	+13
12	− 58	+ 17	+ 8	− 60	+ 38	+164	−34	− 85	+ 89	+ 44	− 47	− 77	0
13	− 10	+ 52	−106	+ 53	+104	− 40	−33	+173	− 55	+ 59	− 17	+130	+26
14	− 20	+ 21	+ 79	+ 23	− 63	− 76	−20	− 3	− 33	+ 19	− 46	−108	−19
15	− 12	+ 80	− 69	+ 99	−133	+155	−103	− 84	− 6	+ 93	+ 46	+ 37	+ 9
16	− 50	+103	− 37	+136	+141	+ 12	+47	− 22	+176	− 77	+ 69	− 77	+35
17	+ 34	+ 47	+249	− 81	+ 98	+116	+59	+168	−186	+ 71	+ 83	− 71	+49
18	+ 83	−114	−161	+ 38	+ 8	+ 16	+52	+ 38	−151	+133	+ 58	+ 37	+ 3
19	+112	− 27	+244	− 97	− 88	+132	+25	− 54	− 73	+ 4	− 94	+ 12	+ 8
20	+ 83	− 84	+151	+ 49	+ 27	+137	+4	− 12	+ 51	−172	− 43	+ 26	+18
21	−101	−181	−102	+ 25	+210	+ 68	+77	−108	−137	0	− 35	+182	−16
22	− 95	+ 32	− 55	− 66	− 67	+ 44	−64	0	− 89	− 10	− 50	+ 89	−28
23	− 18	−120	+ 69	+ 4	+ 74	− 65	+38	+ 26	− 49	− 2	+ 34	+ 74	+ 5
24	+ 34	0	−114	− 57	+ 38	+120	−43	+ 7	+ 56	−124	− 58	+ 29	− 9
25	+333	+ 31	−211	−142	+ 16	−150	+35	+ 33	+117	+ 39	−135	− 15	− 4
26	−137	− 45	− 7	+ 90	− 6	−146	+11	+ 49	−133	−164	− 32	−124	−54
27	−174	−126	− 91	+147	+ 6	−104	−60	−131	− 63	+ 17	−116	− 87	−65
28	+ 41	+ 79	+ 29	−196	− 78	− 60	+3	− 41	+216	− 8	− 58	+ 33	− 3
29	−154	+124	− 11	− 52	+ 33	−182	−67	+ 42	− 68	− 5	− 34	−112	−40
30	− 59	− 66	−138	− 72	+ 90	− 82	−29		+189	− 7	− 34	− 8	−19
31	− 10	−191		−113	− 32	− 4	−248		+234		+ 14	− 51	−45
32		− 33		−116	− 7	+ 30	−35		− 11			− 14	−27

三、残差平均值的分析及其系统改正

1. 星序改正

按照各组中星的观测次序，依次将各星的残差平均值再取平均，即分别将 12 组中每组的第 1 颗，第 2 颗，……第 32 颗各有 12 个残差平均值求平均，如表 5 中最后一列的数字，各星残差的平均值除去一组星的开头几颗外，递减的趋势非常明显，显示出一种系统变化。中国科学院上海、北京天文台的同类型仪器也显示了这种结果，他们的分析得出等

表 6　1965—1975 年残差平均值的中误差（单位 0.″01）

星序＼星组	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1.4	1.4	1.6	1.8	2.4	1.9	1.8	2.2	1.8	1.2	1.4	1.2
2	1.3	1.2	1.3	1.7	2.0	2.0	1.8	1.5	1.6	1.3	1.2	1.3
3	1.2	1.2	1.3	1.8	1.8	1.7	1.4	1.6	1.6	1.4	1.0	1.0
4	1.7	1.2	1.7	1.7	1.4	1.7	1.7	1.6	1.8	1.3	1.2	1.2
5	1.3	1.2	1.1	1.5	1.4	1.8	1.9	1.7	1.6	1.1	1.2	1.3
6	1.1	1.4	1.5	1.4	1.6	2.0	1.8	1.7	1.9	1.2	1.2	1.1
7	1.3	1.2	1.4	1.6	1.5	1.6	1.7	1.6	1.4	1.2	1.2	1.2
8	1.4	1.3	1.4	1.7	1.5	1.4	1.8	1.9	1.5	1.3	1.1	1.2
9	1.4	1.1	2.0	1.5	1.8	1.5	1.4	1.9	1.3	1.1	1.6	1.3
10	1.3	1.1	1.8	1.6	1.5	1.3	1.8	1.7	1.3	1.2	1.1	1.1
11	1.4	1.2	1.4	1.6	1.8	1.7	1.5	1.9	1.5	1.2	1.2	1.4
12	1.3	1.3	1.3	1.5	1.7	1.3	1.4	1.7	1.8	1.2	1.0	1.2
13	1.5	1.2	1.3	1.6	1.5	1.8	1.4	2.3	2.0	1.2	1.0	1.2
14	1.1	1.2	1.5	1.6	1.8	1.4	1.6	1.6	1.4	1.0	1.0	1.2
15	1.5	1.3	1.7	1.5	1.7	1.5	1.8	2.1	1.4	1.3	1.1	1.1
16	1.3	1.2	1.4	1.8	2.0	1.5	1.6	1.4	1.5	1.1	1.1	1.3
17	1.5	1.1	1.7	1.7	1.5	2.0	1.6	2.4	1.6	1.1	1.3	1.4
18	1.3	1.1	1.3	2.3	1.8	1.5	1.7	1.8	1.3	1.1	1.1	1.2
19	1.3	1.2	1.8	1.5	1.5	1.4	2.0	1.7	1.6	1.1	1.0	1.2
20	1.3	1.2	1.4	1.7	1.5	1.8	1.3	1.8	2.2	1.2	1.1	1.2
21	1.2	1.2	1.2	1.5	2.2	1.2	1.7	1.6	1.3	1.3	1.1	1.2
22	1.1	1.1	1.5	1.4	1.5	1.6	1.4	1.7	2.6	1.3	1.7	1.1
23	1.3	1.4	1.5	1.6	2.2	1.9	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2	1.2
24	1.3	1.7	1.3	1.5	2.2	2.0	1.3	2.2	1.6	1.6	1.1	1.3
25	1.9	1.2	1.3	1.6	2.0	1.9	1.5	1.9	1.9	1.2	1.6	1.2
26	1.2	1.2	1.6	1.5	1.4	1.5	1.7	2.2	1.6	1.5	1.4	1.3
27	1.3	1.2	1.4	1.8	1.6	1.8	1.6	1.8	1.4	1.1	1.2	1.0
28	1.2	1.5	1.6	1.8	1.8	1.6	1.6	1.7	1.6	1.2	1.1	1.0
29	1.4	1.8	2.0	1.2	1.7	1.5	1.3	1.8	1.6	1.5	1.2	1.2
30	1.1	1.5	1.4	1.7	1.4	1.4	1.6		1.6	1.3	1.4	1.6
31	1.5	1.1		1.5	1.6	1.9	1.3		2.3		1.1	1.0
32		1.4		1.4	1.7	0.8	1.4		1.7			1.1
平　均	1.32	1.28	1.49	1.61	1.71	1.62	1.60	1.81	1.64	1.24	1.20	1.20

高仪棱镜的棱角与温度变化有关，在一组星的观测过程中，解算钟差和纬度时，棱角是作为不变的，其实棱角随温度作微小的变化，由于一组星的天文观测在正常情况下总是温度逐渐变低，因此棱角显现一种系统变化，残差的星序变化即由此产生。可是在我们的观测结果中分析了相邻两组之间的温度变化与天顶距变化，得到的结果是连续观测的两组之间温差变化大一些，天顶距变化反而小一些，这一问题显然与国内其他天文台的分析结果不同，有待我们去作进一步探讨。现在只就其 $\bar{v}$ 的实际变化解求其线性表达式。由于开始几颗星有不同趋势，先解求二条直线(第 1 至第 9 颗为一条，第 5 至第 32 颗为一条)，然后两直线用平滑曲线连接，于是

$$\left.\begin{aligned} &\text{应用于第 1—3 颗} \quad \Delta n = 1.12n - 3.22 \\ &\text{应用于第 10—32 颗} \quad \Delta n = -0.31n - 5.98 \\ &\text{应用于第 4—9 颗} \quad (n - 8.2)^2 + (\Delta n + 2.5)^2 = 32.4 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中 n 为星序 1，2，3……31，32；Δn 为相应的星序改正，相应的改正值见表7。

表 7 星序改正值(单位 0.″01)

星序 / 改正值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Δn	+2.1	+1.0	−0.1	−1.2	−2.0	−2.8	−3.2	−3.3	−3.2	−2.9	−2.6	−2.3	−2.0	−1.6	−1.3	−1.0
星序 / 改正值	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Δn	−0.7	−0.4	−0.1	+0.2	+0.5	+0.8	+1.2	+1.5	+1.8	+2.1	+2.4	+2.7	+3.0	+3.3	+3.6	+3.9

2. 求星等改正

各星观测的残差按星等排列，如果呈现某种系统变化，就是由于恒星亮度的不同在观测中产生了系统误差，应予改正。

把 375 个星次按星等亮暗顺序排列，并取大致相等的数目划分成 11 个区间，每一区间大致有 30—40 个星次，星等间距为 0.2ᵐ—0.3ᵐ。唯亮星的区间，特别是二等星区间，为避免间距过长引起残差平均值失去代表性，在兼顾星数与间距的情况下，星数较其他区间稍少一些。

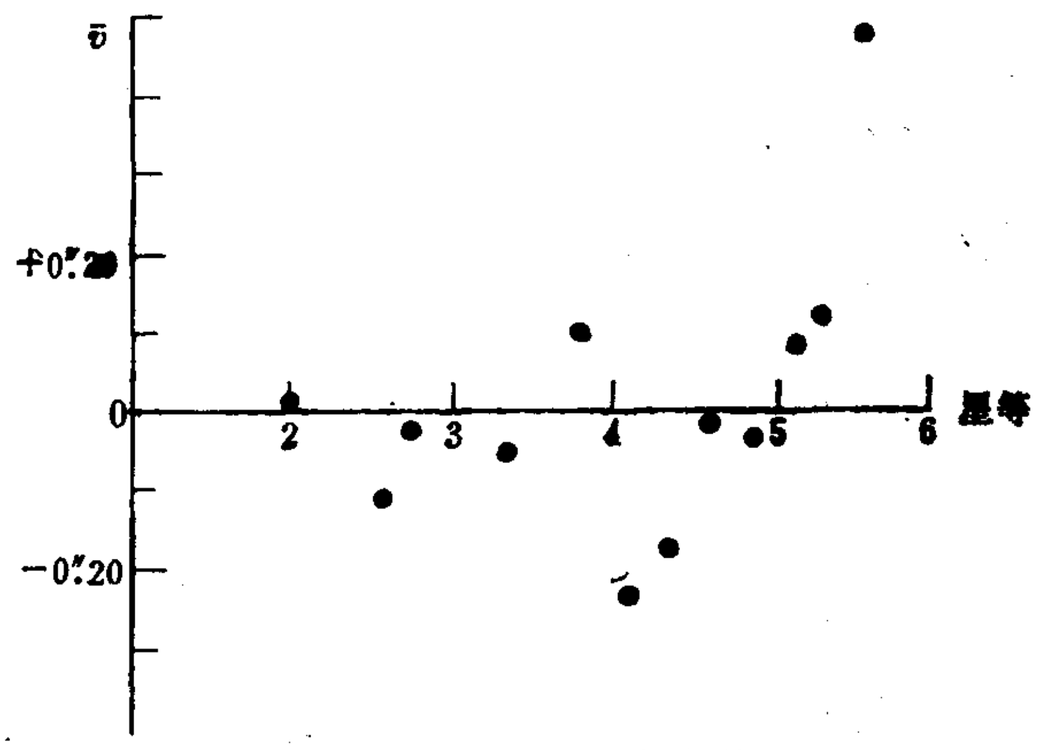


图 1 残差平均值与星等

将同一区间内各星的残差平均值取平均，各值如图 1 所列，从图 1 中不难看出亮于 4.0 等以上的星无显著的系统变化，在暗于 4.0 等的星残差有随亮度变暗而残差递增的现象，求得这一段曲线的残差与星等关系的表达式为：

表 8　星等改正(单位 0.″01)

星　　等	1.6—3.9		4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
Δm	0		+1.8	+1.8	+1.8	+1.7	+1.6	+1.4	+1.2	+0.9
星　　等	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
Δm	+0.6	+0.2	−0.3	−0.8	−1.3	−1.9	−2.6	−3.3	−4.1	−4.9

$$-\Delta m = 0.00657m^2 - 1.85 \text{ (单位 } 0.''01) \tag{10}$$

m 为 4.1星 等以下的相应星等区间，Δm 即为相应的星等改正，见表 8。

关于残差与星等亮度的关系，我们也做过以星等相等间距统计，尽管有些间距内星数有较大差异，但是它们的回归表达式仍很接近，考虑到使星数相等的情况较合理一些，故采用上述改正式。

3. 光谱型改正

将所有星次的经过星序和星等改正后的残差平均值按所属恒星的光谱型分类排列，光谱的类型为 B，A，F，G，K，M 六类。考虑到光谱型影响的数量很少，在取它们的残差的平均时可能易被较大的星位误差所掩盖，故此将残差绝对值大于 0.″20 的舍去，可得光谱型影响的表达式：

$$-\Delta S = -0.36S + 0.44 \text{ (单位 } 0.''01) \tag{11}$$

表 9 列出光谱型改正的有关数字。

表 9　光谱型改正(单位 0.″01)

光　谱　型	B	A	F	G	K	M
星　　数	47	85	48	41	106	21
残差平均	−0.4	+0.8	−0.4	−0.2	−1.4	−0.7
S	0	1	2	3	4	5
ΔS	−0.4	−0.1	+0.3	+0.6	+1.0	+1.4

四、组间改正

武昌时辰站等高仪按观测纲要每晚观测两组，少许夜晚观测了三组甚至四组。凡是同一观测员在一夜晚相邻两组的观测，观测结果均符合前面所提残差取舍标准的，都用作求组间差。在十一年内共得 1022 个组间差，如表 10 所列。在求解组间差改正时，由于一年中晴夜分配不均匀，甚至使个别年份不能构成连锁 (如 1967 年缺 F—G)，故此采取对 11 年的组间差求平均值，然后再连锁求组间改正。

精密的时纬观测结果都应该顾及固体潮引起地壳形变的影响，因此 11 年的时纬的组间差都加入了固体潮影响的改正，与国际时间局的一样取 $1 + K - l = 1.2$，表 10 列出它们改正前后的数值。

表 10 组间差 （单位 0.″01）

组间差个数			A—B	B—C	C—D	D—E	E—F	F—G	G—H	H—I	I—J	J—K	K—L	L—A	闭合差
			107	115	74	61	72	71	61	51	84	123	104	100	
组间差	时间（毫秒）	未加固体潮改正	+0.5	+2.1	+1.4	−1.3	−4.4	−2.3	+0.9	−0.1	−4.2	−1.2	−1.5	−1.7	−11.8
		已加固体潮改正	+0.9	+2.4	+2.0	−1.4	−4.1	−1.9	+1.0	0.0	−4.1	−1.0	−1.3	−1.2	−8.7
	纬度 0.″01	未加固体潮改正	−0.5	+2.1	+4.5	−7.2	−5.6	+5.4	−4.7	−4.5	−8.6	+5.1	−4.5	+4.9	−13.6
		已加固体潮改正	−0.5	+2.2	+4.7	−6.7	−4.9	+5.8	−4.2	−4.2	−8.4	+5.3	−4.3	+4.9	−10.3
	天顶距 0.″01		+20.5	+12.0	+21.0	+12.6	+4.7	+13.1	+13.8	+5.3	+20.8	+11.2	+18.1	+13.3	166.4

Danjon 等高仪观测的结果，普遍存在着天顶距结果的组间差的闭合差偏大的现象，达到 1″—2″。目前比较一致的看法是稜镜的稜角受温度的影响（天文观测总是在一组星的观测开始时空气温度较高，结束时温度较低，也就是由较高温度到较低温度），天顶距缓慢的增大（稜角缓慢的缩小）。前面提到的星序改正就是这一现象的结果。因此，一般地说，统计分析构成天顶距组间差的观测时的仪器温度与组间差数值，可证实上述看法，但是根据我们的资料统计却是得到相邻两组之间的温度变化较大，稜角的变化倒反而较少，这与组间差闭合差的现实和星序改正的现实有矛盾，其中原因有待进一步探索。如果天顶距的组间差闭合差确实存在着由于仪器原因所引起的系统误差，而这原因又认为是随稜角受温度变化而变化，那末从表 11 可认为相邻两组的温度变化基本是一样的，因此可认为组与组之间的组间差都存在有相同的影响。这样，不难证明用连锁法计算组间差改正时，对

表 11 相邻两组观测室温度差的 11 年平均

	A—B	B—C	C—D	D—E	E—F	F—G	G—H	H—I	I—J	J—K	K—L	L—A
温度差平均	+0:9	+0:9	+0:9	+1:1	+1:1	+1:0	+1:1	+1:0	+0:8	+0:9	+0:9	+0:9

表 12 组间差改正及其中误差

组序	时间 (dx)		纬度 (dy)		天顶距 (dz)	
	组间差改正	中误差	组间差改正	中误差	组间差改正	中误差
	(0:0001)	(±0:0001)	(0.″001)	(±0.″001)	(0.″001)	(±0.″001)
A	−32	16	− 5	28	− 22	27
B	−15	16	− 1	26	+ 44	29
C	+16	17	+30	30	+ 29	31
D	+43	20	+85	29	+100	32
E	+36	21	+27	28	+ 87	34
F	+ 3	21	−14	28	− 5	33
G	− 9	22	+53	29	− 13	35
H	+ 8	22	+19	31	− 14	34
I	+16	18	−14	27	−100	29
J	−18	16	−90	25	− 31	24
K	−21	16	−28	23	− 58	24
L	−27	16	−62	28	− 16	25

于各个组间差都是相同的系统误差是可以完全消去的，因此我们说在表 12 中所列出的各种组间差改正是不包含有属于同一条件所引起的系统误差的。

各组的组间差改正及其相应的中误差列于表 12。

五、星位改正计算

1. 基本公式

一个星组内第 i 星的误差方程为：

$$15\cos\varphi_0\sin A_iX + \cos A_iY - Z + \delta h_i = 0 \tag{12}$$

其中 X，Y，Z 分别对于钟差采用值 u_0，纬度采用值 φ_0，天顶距 z_0 的改正量，A_i 为星过等高圈时的方位角，自北向东计量，δh_i 是一个观测量，由星过等高圈的记录时刻 T_i 和 FK4 星表中给出该星的坐标 α_i 和 δ_i 算出。因此 δh_i 包含有观测误差 Δh_i 和由恒星坐标 α_i，δ_i 的误差 $\Delta\alpha_i$，$\Delta\delta_i$ 引起的误差 $\Delta(\delta h_i)$。由于 δh_i 含有误差，使(13)式不能解得 X，Y，Z，而是 x，y，z 即

$$\begin{aligned} X &= x + \Delta x \\ Y &= y + \Delta y \\ Z &= z + \Delta z \end{aligned} \tag{13}$$

以及

$$\delta h_i = \Delta h_i + \Delta(\delta h_i)$$

将 x，y，z，Δh_i 代回方程(13)就得残差 v_i，即：

$$15x\cos\varphi_0\sin A_i + y\cos A_i - z + \Delta h_i = v_i \tag{14}$$

比较(12)，(14)式得：

$$15\Delta x\cos\varphi_0\sin A_i + \Delta y\cos A_i - \Delta z + \Delta(\delta h_i) = -v_i \tag{15}$$

由一般球面天文学中公式可求得 $\Delta(\delta h_i)$ 与 $\Delta\alpha_i$ 和 $\Delta\delta_i$ 的关系，即

$$\Delta(\delta h_i) = -15\cos\varphi_0\sin A_i\Delta\alpha_i + \cos q_i\Delta\delta_i \tag{16}$$

以(16)式代入(15)式得

$$15\cos\varphi_0\sin A_i\Delta\alpha_i - \cos q_i\Delta\delta_i = 15\cos\varphi_0\sin A_i\Delta x + \Delta y\cos A_i - \Delta z + v_i \tag{17}$$

(17)式中包含了五个未知量 $\Delta\alpha_i$，$\Delta\delta_i$，Δx，Δy，Δz 一个已知量 v_i。

由于观测结果中不可避免地存在着各种原因引起的观测系统误差，其中特别组与组之间的组间差，因而 Δx，Δy，Δz 中就不仅仅是包含着星表误差。令

$$\begin{aligned} \Delta x &= dx + \xi \\ \Delta y &= dy + \eta \\ \Delta z &= dz + \zeta \end{aligned}$$

其中 dx，dy，dz 为组间差所引起，ξ，η，ζ 是其他各种系统误差。于是(17)式写成

$$\begin{aligned} &15\cos\varphi_0\sin A_i\Delta\alpha_i - \cos q_i\Delta\delta_i \\ &= v_i + 15\cos\varphi_0\sin A_idx + \cos A_idy - dz + 15\cos\varphi_0\sin A\xi + \cos A_i\eta - \zeta \end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned} 15\cos\varphi_0\sin A_idx + \cos A_idy - dz &= dv_i \\ v_i &= v_i + dv_i \end{aligned} \tag{18}$$

于是前式可写成:

$$15\cos\varphi_0\sin A_i\Delta\alpha_i - \cos q_i\Delta\delta_i = v_i + 15\cos\varphi_0\sin A_i\xi + \cos A_i\eta - \zeta \quad (19)$$

上式中 ξ, η 和 ζ 不能直接决定,在解算星位改正时让它隐含于星位改正 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 中, dx, dy, dz 可以预先解算(下面将具体述及),这样所要求的未知量只有 $\Delta\alpha_i$ 和 $\Delta\delta_i$ 了。

求两次通过等高圈的恒星的星位改正: 同一颗星分别在子午线东、西侧两次通过等高圈的观测可以建立两个(19)式的方程。由于二次通过等高圈的同一颗星总是不在同一星组,因星组的不同,残差 v_i 所对应的系统亦不同,以求组间差改正的办法使它们纳入到同一系统,并由此决定 dx, dy, dz。故(19)式的 v_i 为已知量,可建立两个方程为:

对于在东边过等高圈:

$$15\cos\varphi_0|\sin A_i|\Delta\alpha_i - \cos q_i\Delta\delta_i = v_E + 15\cos\varphi_0|\sin A_i|\xi + \cos A_i\eta - \zeta \quad (20)$$

对于在西边过等高圈:

$$-15\cos\varphi_0|\sin A_i|\Delta\alpha_i - \cos q_i\Delta\delta_i = v_W - 15\cos\varphi_0|\sin A_i|\xi + \cos A_i\eta - \zeta \quad (21)$$

从 (20) 式减去 (21) 式得

$$\Delta\alpha_i = \frac{v_{Ei} - v_{Wi}}{30|\sin A_i|\cos\varphi_0} + \xi \quad (22)$$

ξ 在这里对每一颗星的 $\Delta\alpha$ 都是等量的,因此实质上是对赤经零点的修正量。由于本项观测工作不能决定,其影响亦不作考虑。

将(20)式与(21)式相加

$$\Delta\delta_i = -\frac{v_{Ei} + v_{Wi}}{2\cos q_i} - \frac{\cos A_i\eta - \zeta}{\cos q_i} \quad (23)$$

(23) 式等号右边第二项是未知的系统误差的影响,我们可作如下的考虑以削弱其影响。

将(23)式等号两边各乘以 $2\cos q_i$, 并对过大距的星取值,以 0 注脚表之则有

$$-2(\cos A_i\eta - \zeta) = v_{0E} + v_{0W}$$

$$2k = v_{0E} + v_{0W} \quad (24)$$

令

以(24)式代入(23)式:

$$\Delta\delta_i = -\frac{v_{Ei} + v_{Wi} - 2k}{2\cos q_i} - \frac{\cos A_i - \cos A_0}{\cos q_i}\eta \quad (25)$$

在中纬度地区上式右边第二项未知数 η 的系数很接近于 1,因此对于 $\Delta\delta_i$ 都有接近相等的修正量。由于本项观测工作无法决定 η, 其影响不作考虑,以后在计算 $\Delta\delta_i$ 时只取(25)式右边的第一项。

求一次通过等高圈的恒星的星位改正:

如果恒星在观测纲要里只是一次过等高圈,从(19)式可得:

$$\Delta\alpha_i = \frac{v_i}{15\cos\varphi_0\sin A_i} - \frac{\cos q_i}{15\cos\varphi_0\sin A_i}\Delta\delta_i + \xi + \frac{\cos A_i\eta - \zeta}{15\cos\varphi_0\sin A_i} \quad (26)$$

上式等号右边第三四项根据以上理由,不予以考虑,第二项要求小到可以忽略,则可算得 $\Delta\alpha$。通常 $\Delta\delta$ 很少超过 0.″3, 设若 $|\cos q_i/\sin A_i| \leqslant 0.4$, 在武昌的 $\varphi \doteq 30.^\circ5$ 的情况下(即 $22.^\circ0 \leqslant \delta \leqslant 45.5$), 可保证 $\Delta\alpha$ 内由于略去第二项的误差不超过 0.^{s}01。

从(19)式亦可得

$$\Delta\delta_i = -\frac{v_i}{\cos q_i} + \frac{15\cos\varphi_0 \sin A_i}{\cos q_i}\Delta\alpha_i - \frac{15\cos\varphi_0 \sin A_i}{\cos q_i}\xi - \frac{\cos A_i\eta - \zeta}{\cos q_i} \qquad (27)$$

上式右边的第三、四项根据以上理由，亦不予以考虑。如若使第二项的影响小于 0.″1，则 $|\sin A/\cos q| \leqslant 0.2$，要满足这一条件，武昌的等高观测纲要没有单次过等高圈的星可供计算 $\Delta\delta$，如将第二项的影响放宽到 0.″2，则 $|\sin A/\cos q| \leqslant 0.5$，如此，则 $\delta \geqslant 58.^\circ 0$ 的星可供计算。

2. $2k$ 的计算

在观测纲要里正好是大距时经过等高圈的星是不多的，而 $2k$ 值的精度又需要有一定

表 13　v 值　(单位 0.″001)

星序＼组别	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	+ 30	−133	− 31	−132	+ 42	− 80	+ 37	− 23	+ 8	+ 30	+189	+165
2	−107	− 26	+ 11	+ 30	− 60	− 82	+ 42	−102	+ 94	− 37	+116	− 26
3	+ 94	+131	+ 64	+ 7	−109	+ 68	− 69	+ 22	+ 51	+ 61	+107	+139
4	− 23	+ 14	+121	− 76	−123	−105	− 57	+ 17	+101	−115	+141	−101
5	+ 44	+ 71	−180	−151	−158	+ 1	+170	+ 30	+ 93	+ 15	+ 41	+ 54
6	+ 15	+146	− 67	−146	−165	+ 79	− 21	+ 86	+101	−129	+138	− 70
7	+ 18	− 72	− 62	−149	− 87	+127	+116	+ 30	+ 50	+ 56	+114	+ 98
8	+ 81	+ 24	− 16	+ 96	−185	+ 58	+106	− 21	+227	+ 44	+102	+123
9	+ 84	− 11	+180	− 66	− 25	+ 36	− 5	− 66	+150	+111	+ 70	+ 86
10	+ 70	− 87	−103	−165	−128	− 80	− 37	− 26	+115	+109	− 7	− 97
11	+133	−298	+ 34	+ 2	−222	−129	− 37	+168	+139	+166	+ 50	− 63
12	− 7	− 18	− 74	−288	− 41	+161	+ 4	− 98	+168	+100	− 54	− 39
13	− 50	+ 6	−117	+ 24	+ 49	− 30	− 31	+139	+ 11	+134	+ 6	+200
14	+ 35	− 50	+ 22	− 96	−156	− 59	+ 34	+ 19	+ 39	− 20	+ 61	−147
15	+ 35	+ 18	−165	+ 84	−254	+153	−117	−104	+ 59	+ 36	+127	+ 86
16	−110	+ 95	−101	− 47	+ 2	− 6	+ 78	− 7	+274	+ 49	+121	− 92
17	+ 86	− 20	+260	−152	+ 57	+ 71	+ 99	+118	− 91	+141	+163	− 75
18	+152	−185	−189	−207	−118	+ 36	+ 61	+ 37	− 2	+115	+ 86	+ 39
19	+141	− 42	+239	−119	−137	+122	+ 27	− 7	+ 62	+ 25	+ 18	+ 40
20	+ 92	−136	+118	−110	− 85	+147	+ 8	− 21	+ 86	−212	+ 4	+ 24
21	− 55	−180	−127	+ 31	+129	+ 86	+ 38	− 80	− 8	+ 79	+ 41	+ 67
22	− 59	+ 13	− 69	−141	−201	+ 47	− 7	+ 49	− 13	− 56	− 55	+ 75
23	+ 71	−188	+101	− 76	+ 31	− 90	+ 59	+ 58	+ 43	+ 91	+142	+ 64
24	+ 53	− 41	−135	−137	− 8	+145	− 16	+ 53	+192	−100	+ 8	+129
25	+382	+ 37	−197	−240	−104	−110	+ 99	+ 35	+175	+114	− 56	+ 95
26	−139	− 47	+ 3	−78	−119	−130	+ 68	+ 62	+ 18	−127	+ 70	− 81
27	−173	−161	− 68	+ 54	− 79	−109	− 74	− 92	+ 88	+146	− 70	−106
28	+ 48	+ 14	+ 5	−278	− 76	− 25	+ 95	− 2	+360	− 19	+ 47	+ 37
29	−107	+ 78	− 19	− 18	+ 32	−158	+ 26	+ 77	+ 48	+102	+ 55	− 47
30	+ 52	−125	−132	−136	− 6	− 56	+ 35		+308	+ 31	+ 42	+ 69
31	+ 90	−195		−198	−105	+ 20	−199		+316		+156	− 55
32		− 9		−202	− 65	+ 50	− 9		+121			57

数量的星，因此取在大距附近（$\cos q < 0.3$）的星，计得东大距附近的有 58 星次，西大距附近的有 53 星次，如此得到：

$$k = -0''.025 \pm 0''.013$$

3. 星位改正的计算

依式(18)所算得加入组间差改正的各星最后残差及其中误差列于表 13，14。

表 14　v 的中误差（单位 0″.001）

组别 / 星序	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	40	39	45	45	50	47	46	50	43	35	35	41
2	38	37	44	42	48	48	52	47	43	34	35	35
3	37	36	44	47	47	46	49	48	42	35	30	36
4	38	38	44	45	46	46	48	47	43	37	35	35
5	38	39	40	44	46	46	49	48	41	34	34	35
6	36	39	42	44	46	47	49	48	43	34	34	35
7	37	36	41	44	47	46	48	48	40	34	35	38
8	37	37	43	45	46	45	49	49	42	36	34	38
9	35	37	44	44	47	45	47	49	40	35	36	36
10	35	37	42	44	46	45	49	48	39	34	33	37
11	36	39	39	44	47	46	48	49	40	36	34	35
12	37	39	42	45	47	45	47	48	41	34	34	37
13	38	38	40	46	46	47	47	51	42	35	33	36
14	39	36	41	45	48	45	48	48	40	35	34	34
15	36	37	45	45	47	45	49	49	40	37	34	34
16	37	36	40	45	48	46	48	48	39	36	34	36
17	38	36	42	45	46	47	48	51	43	34	35	37
18	36	36	43	48	47	45	48	48	40	34	40	35
19	41	37	42	44	46	45	49	48	42	34	34	35
20	37	37	42	45	46	47	47	48	44	36	34	37
21	40	37	43	44	49	45	48	48	40	36	34	39
22	40	36	42	44	46	46	47	49	46	36	36	36
23	36	39	45	45	49	47	48	48	40	35	35	39
24	39	38	41	44	49	47	47	49	41	36	34	38
25	40	36	40	45	48	47	48	49	42	34	36	35
26	36	37	41	45	46	46	48	49	42	35	36	36
27	36	38	43	46	47	47	48	48	41	35	35	37
28	37	39	43	45	47	46	48	48	42	36	34	34
29	38	39	47	44	47	46	47	47	41	35	35	36
30	38	37	43	45	47	45	48		41	32	35	37
31	37	31		45	46	47	47		45		34	37
32		38		45	43	47	48		41			36

依据(23)、(25)式按表 13 的数值计算了 98 颗二次过等高圈星的 $\Delta\alpha$，以及其中 80 颗星的 $\Delta\delta$。按理除去 $\cos q = 0$（这样的星有二颗）外，所有星均可计算 $\Delta\delta$，但是从实际效果看，由于 $\cos q$ 值太小，使观测误差扩大太多，而使 $\Delta\delta$ 值达到几秒。因此即使二次过等高圈的星也要 $\cos q \geqslant 0.2$ 才计算 $\Delta\delta$。结果见表 15。

表 15 二次过等高圈星的 $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ 及 $M\Delta\alpha$, $M\Delta\delta$

FK4 编号	星组及序号	$\Delta\alpha$	$M\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$M\Delta\delta$	FK4 编号	星组及序号	$\Delta\alpha$	$M\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$M\Delta\delta$
		0:0001	±0:0001	0.″001	±0.″001			0:0001	±0:0001	0.″001	±0.″001
2	A 19	−115	86	+115	31	1302	F 8	0	39	− 73	40
1004	B 3	− 66	20	−117	56	456	F 16	−105	69	+ 55	41
25	B 13	− 56	29	−111	65	1316	F 4	−109	38	− 21	74
42	B 25	− 75	20			1322	F 3	+ 69	24		
1034	A 5	+145	21	+ 49	30	473	F 9	+ 25	26	− 10	66
60	A 2	+ 38	27	+190	35	497	F 30	− 40	55	− 45	47
94	A 6	0	21	− 76	114	1349	F 28	− 2	29	+ 37	53
100	A 8	+ 71	21	+ 39	107	1351	G 11	− 13	53	+ 32	38
99	A 22	−108	52	+ 3	41	528	G 5	+104	42	+163	60
1079	A 16	−124	25	− 60	49	1375	G 21	+ 2	45	− 43	43
111	A 13	+ 38	25			535	G 2	− 7	28		
1093	B 5	+ 86	51	− 22	33	1396	G 15	− 62	24	+117	100
125	A 29	−100	26	− 8	44	562	H 1	− 83	44	− 45	39
144	A 26	− 25	23			570	G 27	− 27	28	+ 76	57
147	A 28	+ 87	25			582	H 7	−145	37	−184	37
175	B 23	−191	60	−115	39	1414	G 26	+ 22	24		
183	B 10	− 5	28	−326	116	1421	H 2	− 67	24	+ 39	53
1137	B 9	+ 56	26			1429	H17	−114	39	−268	42
184	B 14	+ 24	23	+196	71	1434	H 9	− 26	34	− 97	67
1140	B 20	− 38	25	+158	50	626	H 5	+ 2	25		
1145	B 15	+ 68	25			627	H 22	+164	61	− 42	39
1163	B 31	− 42	22	+392	78	1442	H 21	− 93	24	− 22	56
230	C 15	+ 31	49	+208	37	1459	I 6	+ 42	42	− 81	31
1169	C 6	− 50	30	+ 19	49	1460	H 19	− 42	23	−170	99
244	C 21	− 34	44	+116	35	667	H 24	−553	23	−515	128
1176	C 8	+134	36	−310	74	677	I 19	+ 12	50	− 60	30
269	C 13	− 13	24	+232	70	680	I 9	0	26	−200	36
277	C 22	+ 55	26	+248	57	690	I 2	0	21	−242	68
280	C 29	− 18	56	− 12	47	705	I 7	0	21		
292	D 13	+261	96	− 74	37	712	I 18	− 27	23	+ 50	45
312	D 14	− 46	33	+ 68	44	716	I 21	− 59	23	− 96	43
314	D 1	−138	31	+ 62	141	719	I 12	+ 92	23		
1223	D 25	− 85	40	+204	38	726	I 27	+ 76	38	− 56	42
1224	D 32	−100	53	+153	36	730	J 11	+ 22	44	−166	27
1228	D 10	−125	25	+ 15	77	758	J 15	− 18	49	+ 59	33
334	D 31	− 84	40	+155	39	1531	J 21	+ 1	34	− 87	30
335	D 15	− 21	35	+251	78	768	J 17	0	24	−201	36
1232	D 11	+ 37	25			800	K 2	+ 12	35	−123	30
1239	D 17	− 78	25	+135	82	1558	J 18	+ 7	22		
358	D 29	+ 73	41	−132	57	1570	J 26	− 78	20	− 61	54
1249	E 11	−133	46	+144	38	835	A 7	+ 5	20		
365	E 4	−103	31	+ 26	44	834	K 16	0	31	−149	30
384	E 3	− 45	26	+160	93	836	K 18	+ 27	68	+ 88	33
386	E 2	− 29	30			844	A 3	+ 13	34	+181	45
398	E 23	− 20	72	+ 50	42	862	A 18	− 62	19	−221	74
1275	E 8	−113	26			870	A 23	− 25	19	−166	106
407	E 9	− 20	27			1606	A 11	− 43	26	−114	33
409	E 21	+ 11	33	−167	49	892	A 14	+ 57	35	− 93	32
422	E 19	− 48	26	+176	76						
1297	F 11	− 64	59	+100	36						

依据式(26)、(27)及上述相应的条件计算了73颗一次过等高圈的星的 $\Delta\alpha$，7颗星的 $\Delta\delta$。结果见表16。

表16 一次过等高圈星的 $\Delta\alpha$，$\Delta\delta$ 及 $M\Delta\alpha$，$M\Delta\delta$

FK4 编号	星组及序号	$\Delta\alpha$	$M\Delta\alpha$	FK4 编号	星组及序号	$\Delta\alpha$	$M\Delta\alpha$
		0ˢ.0001	±0ˢ.0001			0ˢ.0001	±0ˢ.0001
1005	B 8	− 20	31	1368	F 31	+ 19	45
18	L 4	+ 81	28	522	I 5	− 72	32
27	B 16	− 74	28	534	I 14	− 30	31
1021	B 19	+ 37	33	1380	G 3	− 54	38
33	B 22	− 11	31	540	G 7	+113	47
1023	L 11	− 49	27	557	G 13	− 24	36
1035	B 26	+ 47	37	563	I 29	− 38	33
1045	L 22	+ 68	32	568	I 32	−102	34
64	L 28	+ 29	27	580	G 23	+ 52	42
75	C 5	+146	33	593	G 30	+ 27	37
79	C 7	+ 50	33	621	H 3	+ 20	44
1082	A 10	+ 57	29	1446	J 24	+ 80	29
139	A 27	−134	28	641	J 25	− 88	26
181	B 7	− 58	29	1468	H26	+ 48	38
192	D 28	+238	38	681	K 6	−107	26
202	B 18	−144	28	684	K 9	− 64	33
221	E 6	+142	40	713	I 10	+ 91	31
255	E 18	+112	45	1498	I 13	+ 9	33
274	C 11	+ 30	36	740	I 24	+161	34
279	E 26	+ 93	36	1521	L 5	− 44	28
286	C 17	+206	33	760	J 2	− 29	26
287	C 19	+190	33	765	J 1	+ 26	31
1196	E 32	+ 50	33	780	J 7	+ 45	27
294	C 25	−153	31	1549	L 19	− 31	27
1207	C 26	+ 2	32	793	L 26	+ 69	31
305	F 5	− 1	36	1568	L 32	− 57	36
328	F 18	− 28	36	1583	A 9	− 73	30
346	F 27	+103	44	1584	L 15	− 67	27
1244	D 19	− 92	34	852	A 17	− 74	33
360	D 21	+ 26	37	857	K 5	+ 28	27
390	G 14	− 28	40	869	K 12	− 50	31
412	G 22	+ 6	38	880	K 20	+ 3	26
1282	E 13	+ 43	41	1616	K 22	− 48	32
1300	E 24	− 6	40			$\Delta\delta$	$M\Delta\delta$
1318	F 1	− 62	36	237	C 23	0″.001	±0″.001
461	H12	+ 84	41	1317	F 25	+111	49
470	H14	− 17	43	484	G 32	+121	52
1323	F 7	+ 99	36	598	I 17	+ 10	53
1332	H18	− 29	37	1476	I 26	−102	40
1346	F 17	+ 63	42	1602	L 1	− 20	46
				878	A 1	−182	45
						− 33	43

六、星位改正的系统误差

1. 星区系统改正 $\Delta\alpha_a$，$\Delta\delta_a$；$\Delta\alpha_s$，$\Delta\delta_s$

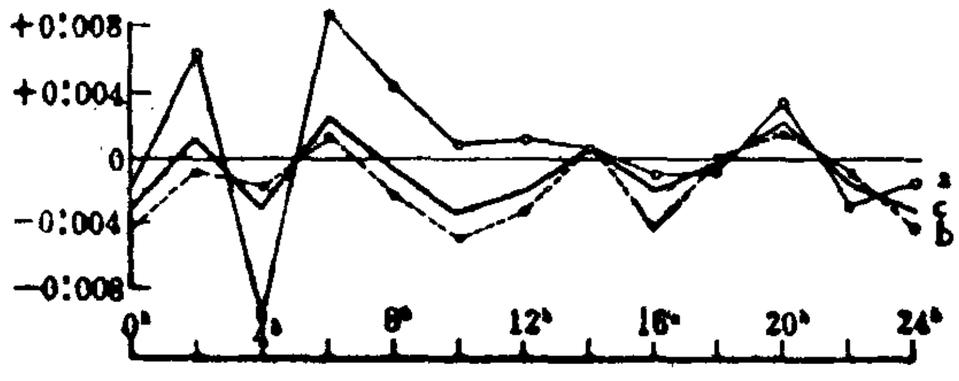
将所有进行星位改正计算的恒星按赤经顺序排列，以二小时为一星区；分别求 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 的平均值结果如表17和图2所示。二次过等高圈的星和一次过等高圈的星的 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 求平均时以该星通过等高圈的次数为权。

表 17　$\Delta\alpha_\alpha$ 和 $\Delta\delta_\alpha$ 值

星　区　(小时)	23—1	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23
二次过等高圈的星数	6	7	6	10	12	10	7	6	11	7*	7	8
一次过等高圈的星数	9	6	2	4	9	6	6	6	6	6	7	6
$\Delta\alpha_\alpha$(0:0001)	−30	−25	−29	+26	−5	−33	−22	+7	−30	−1	+1	−4
二次过等高圈的星数	6	6	3	8	11	7	6	5	9	6*	6	6
$\Delta\delta_\alpha^{**}$(0″001)	−81	−24	−48	+49	+119	+8	+38	+29	−49	−117	−91	−48

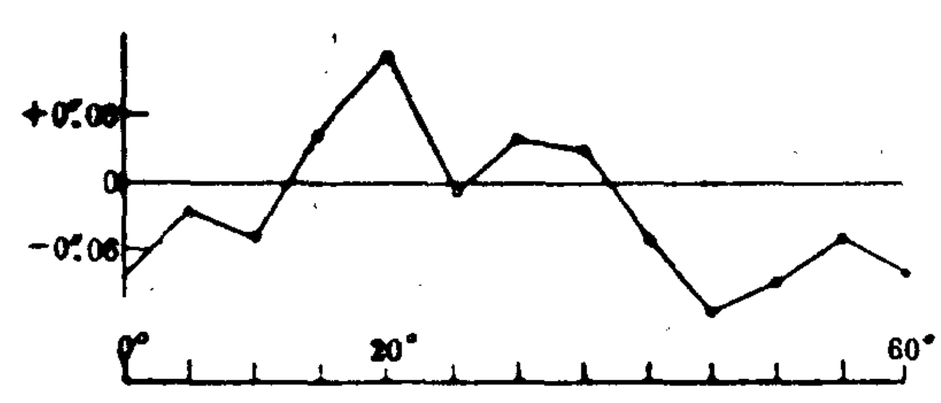
* FK4No.667 未计算在内；

** 没有采用一次过等高圈的星。



(a)　$\Delta\alpha_\alpha$

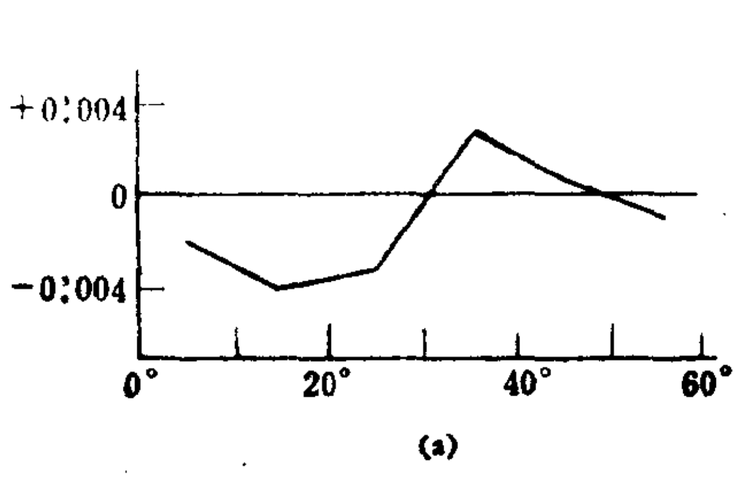
a. 由一次过等高圈星所得；　b. 由二次过等高圈星所得；
c. 由全部计算 $\Delta\alpha$ 的星所得。



(b)　$\Delta\delta_\alpha$

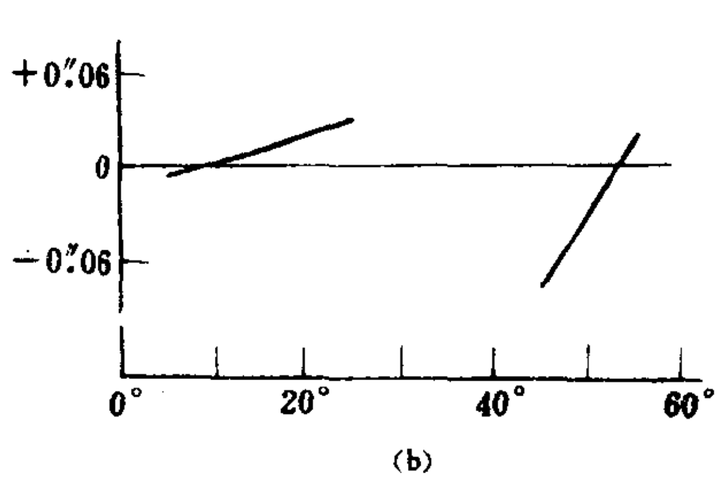
图 2　系统改正 $\Delta\alpha_\alpha$，$\Delta\delta_\alpha$

将所有进行星位改正计算的恒星按赤纬顺序排列，以 10° 为一星区，分别对 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 求平均值。由于 $29° \leqslant \delta \leqslant 42.^\circ 2$ 范围内 $\cos q \leqslant 0.2$ 不适宜解求 $\Delta\delta$，所以 $\Delta\delta_\delta$ 缺赤纬为 30°—40° 的值。如表 18 及图 3。



(a)

(a)　$\Delta\alpha_\delta$



(b)

(b)　$\Delta\delta_\delta$

图　3

表 18 $\Delta\alpha_\delta$ 和 $\Delta\delta_\delta$

星区	0°—10°	10°—20°	20°—30°	30°—40°	40°—50°	50°—60°
$\Delta\alpha_\delta$(0^s.0001)	−19	−42	−33	+25	+7	−7
$\Delta\delta_\delta$(0″.001)	−8	+9	+31		−79	+16

2. 残差平均值与方位角的关系

将所有星次的残差平均值按观测时的方位划分区间取其平均，方位自 5°（355°）起向东（西）每隔 10° 为一个区间，直至 155°(205°)，共 30 个区间。惟 5°—15° 和 345°—355° 这二个区间测星太少，二个区间一共只有三星次，故此不取用这二个方位区，实际只有 28 个区间，平均值列于表 19 并绘成图 4，从图上可以明显地看出，残差值随方位的分

表 19 残差平均值随方位的分布(单位 0″.001)

A_E	15°—25°	25°—35°	35°—45°	45°—55°	55°—65°	65°—75°	75°—85°
$\bar{V}_{Ei}$	+32	+26	+7	−8	+12	+39	+7
$\bar{V}_{Wi}$	−30	−37	−9	−16	−20	−9	+22
A_W	345°—335°	335°—325°	325°—315°	315°—305°	305°—295°	295°—285°	285°—275°
A_E	85°—95°	95°—105°	105°—115°	115°—125°	125°—135°	135°—145°	145°—155°
$\bar{V}_{Ei}$	−38	−18	−99	−22	+10	+11	−17
$\bar{V}_{Wi}$	+47	+24	+34	+53	+68	+44	−29
A_W	275°—265°	265°—255°	255°—245°	245°—235°	235°—225°	225°—215°	215°—205°

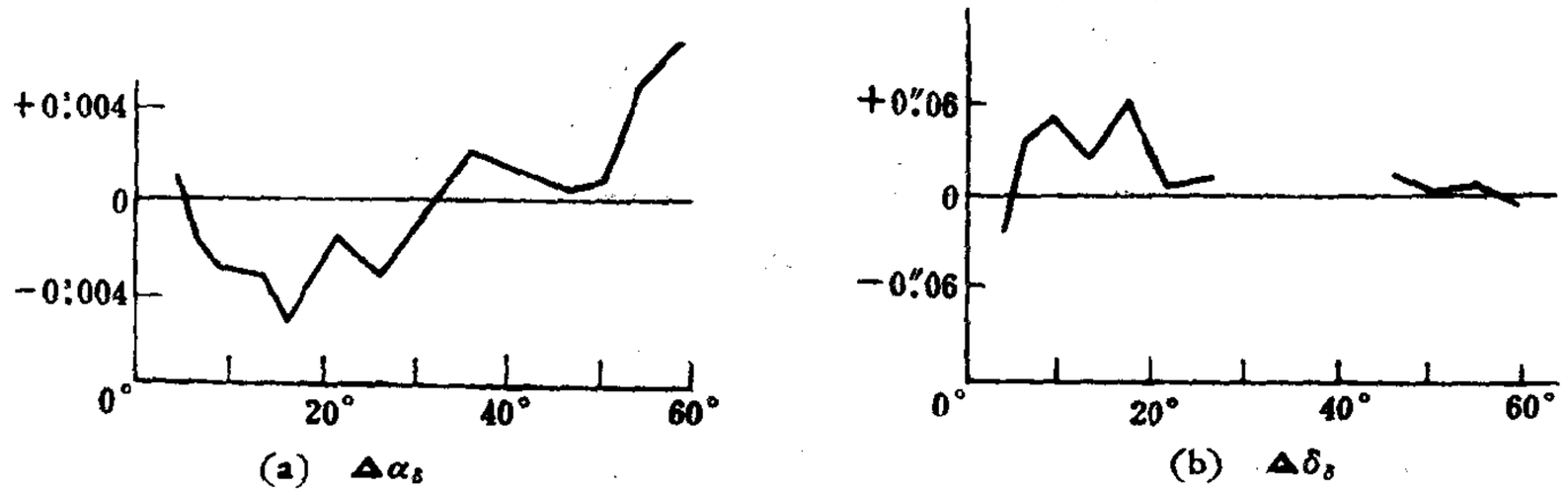


图 4 由方位差算得的 $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$

布为一椭圆，长轴方向为 WN—ES 方向。每一东西对称的方位区实际是代表了一个赤纬区，依东西对称方位区的残差平均值可解求 $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ 列于表 20 和绘成图 5。

表 20 按东西对称方位区的残差平均值解求 $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ (单位 0^s.0001, 0″.001)

A	20° 340°	30° 330°	40° 320°	50° 310°	60° 300°	70° 290°	80° 280°	90° 270°	100° 260°	110° 250°	120° 240°	130° 230°	140° 220°	150° 210°
δ	57°.8	54°.3	50°.4	45°.9	41°.0	35°.9	31°.0	26°.1	21°.4	17°.0	12°.9	9°.4	6°.3	4°.0
$\Delta\alpha_\delta$	+70	+49	+10	+4	+14	+20	−6	−33	−17	−55	−33	−29	−20	+9
$\Delta\delta_\delta$	−1	+8	+12	+12	—	—	—	+16	+7	+61	+24	+54	+33	−26

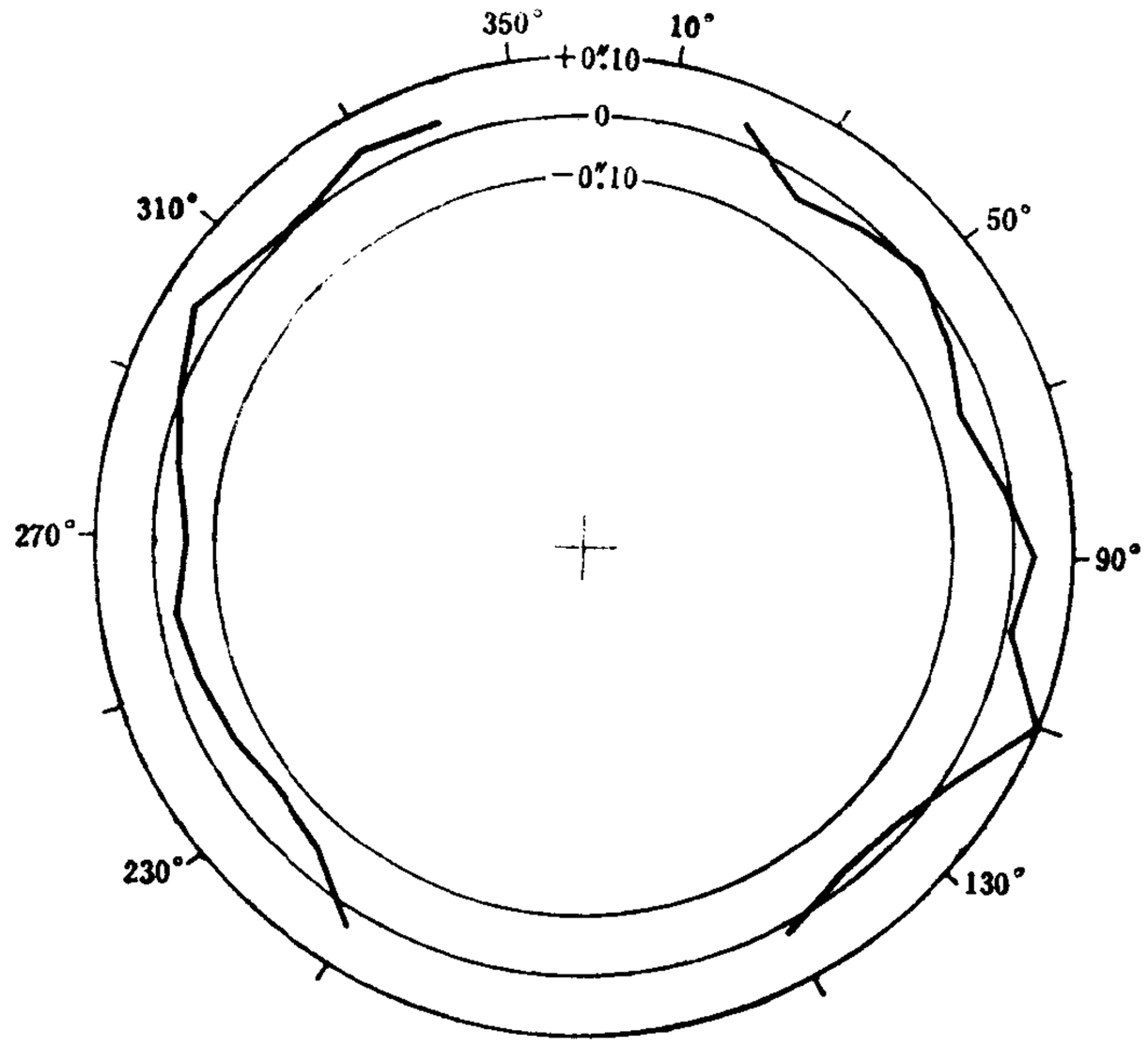


图 5　残差随方位分布

比较图 3 和图 5 的 $\Delta\alpha_\delta$，除去赤纬 50° 以上的星区不一致外，其余赤纬区几乎是完全一致的。高赤纬星区不一致有两种原因，一是测星较少，二是 $\sin A$ 值较少影响了计算精度。$\Delta\delta_\delta$ 的图形在低赤纬星区基本还是一致，在高赤纬地区也是比较不一致。

七、一 些 看 法

1. 星区的系统误差

综观以上有关 $\Delta\alpha$ 方面的图，我们所得的全测区（δ:0°～60°）的赤经改正平均偏负，接近 1 毫秒，我国其他天文台根据等高仪观测结果推求星位改正时亦有相类似的现象出现，特别是我们武昌时辰站与上海天文台的推算结果十分相近，尽管我们的共同星很少、观测室的情况和地区环境差别也很大，但是由于我们两地的纬度相近，随方位分布的残差是惊人的一致。这只能是 FK4 星表的一种系统误差，而且在有些星区有较大的系统差，由图 3 和图 5 可看出，赤经的偏负的改正，主要产生在低赤纬（$\delta < 30°$）星区，由此而构成观测残差在依方位分布上在南天的偏东，所以这一系统误差在低赤纬星区接近 −2 毫秒。

用等高仪观测结果订定赤纬的订正看来比做赤经的订正要差一些，原因是测星最多的位置刚好是赤纬订正工作中的“盲区”（$\cos q \approx 0$ 指中纬度地区）以及是 $\cos q$ 值偏小的位置，将观测误差不适宜地过分的扩大。从以上各图中也可看出 $\Delta\delta_\delta$ 不同的统计方法之间符合得比较差。

2. 星位订正的精度

从表 6 和表 4 可看出武汉地区自 7 月至 12 月这一时期的观测质量较好。 据统计武

汉地区的晴天也以这一时期较多，相应的工作星区为赤经 17^h—29^h。连续的晴天表示地区性大气相对稳定性好，对于观测精度具有决定性的意义，这反映在表 6 中则以 17^h—5^h 诸星组的残差平均值具有较好的中误差。组间差改正值的中误差对于星位订正精度的影响几乎二倍于单星观测残差的中误差，也就是星位订正的误差主要来自星组改正值的误差。由表12也明显地看出同样以上述诸星组有较高的精度。表 6 和表12是两种完全不相关的变量的中误差。表 21 为根据上述诸表结果求得的各月晴天分布数与观测精度之间的相关系数，说明它们之间的密切相关。因此下半年观测星组的星具有较好的星位订正精度，上半年则较差。这一现象在我国各天文台的工作基本具有相同情况。

表 21　各月的晴天数与观测精度的相关性

中　误　差	M_ρ	M_{dx}	M_{dy}	M_{dz}
r	−0.83	−0.87	−0.71	−0.93

参　考　文　献

[1] Debarbat, S., Guinot, B., La méthode des hauteurs egales en astronomie, 1970.

[2] 上海天文台等高仪组：利用上海天文台丹容等高仪 1965—1972 年的观测结果确定星位改正，天文集刊，2，科学出版社，(1978)，10—26。

[3] 南京大学天体测量教研室，北京天文台授时组：北京天文台等高初始星表 (ACPI)，天文集刊，2，科学出版社，(1978)，27—48。

[4] Sakai, S., Horiai, K., etc., *Publication of the International Latitude Observatory of Mizusawa*, **X**, 2, (1976).

POSITION CORRECTIONS TO THE FK4 STARS DERIVED FROM THE RESULTS OF OBSERVATIONS WITH WUCHANG TIME OBSERVATORY DANJON ASTROLABE

Wuchang Time Observatory,

Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica,

Department of Astronomy, Nanjing University

Abstracts

The corrections for the position of the FK4 stars used in our astrolabe works were derived from the time and latitude observation during the period from January 1965 to December 1975. The method of analysis used here is the same as those employed by other authors for the astrolabe works. In this paper, we give the estimation of the correction for stars number, magnitude and the type of spectrum; For the correction of group to group, the influences of Earth tides have been considered, 98 double passage and 80 single passage stars are used to determine the correction $\Delta\alpha$ and $\Delta\delta$ of the position of stars. The RMS of the corrections for $\Delta\alpha$ and $\Delta\delta$ are between $\pm 0^s.002$— $\pm 0^s.007$ and $\pm 0.''03$— $\pm 0.''13$ respectively, but the majority of which are $\pm 0^s.003$ and $\pm 0.''05$ respectively. We have also analysied the systematic corrections for $\Delta\alpha_a$, $\Delta\delta_a$ and $\Delta\alpha_\sigma$, $\Delta\delta_\sigma$.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

关于天文方位角测定的若干误差问题

韩 天 芑

摘　　要

本文根据实际观测资料，分析了存在天文方位角测定中的仪器差，人差的数量级及产生的原因。对于视准差与方位角的关系作了较深入的讨论，还分析了仪器视准差与温度变化的关系。

不同的全能经纬仪、不同的观测员可以使天文方位角有 1″—2″ 的系统误差。

在二十年前，为了研究我国天文大地网横向控制的精度问题，我所曾组织了一次关于天文方位角测定中存在着哪些系统误差的外业试验观测*。工作中采用了二架 Wild T4 型和二架 AY2″/10″ 型的全能经纬仪，这二种类型的仪器都是我国用以进行野外天文方位角测定的主要仪器。为了对比，还采用了二架 Wild T3 型仪器，这种仪器是解放初期用来测定天文方位角的。试验观测由四位观测员**同时进行各种对比观测，目的是想了解天文方位角测定中的人差、仪器差的情况、环境条件的影响，以及观测纲要和操作程序中有否问题。1960 年我所天文组在参加西藏地区的测量考察中又进行了与本题有关的一些试验。在这两次试验中都得到了较好的实践资料。

自空间技术应用于大地测量以来，对于今后野外的经典天文测量是否还有必要？似乎是有朝一日就有被摒弃之势。殊不知这二种手段所得的结果，从参考坐标系来说是不同的，前者是地心坐标系后者是地平坐标系，在测绘工作中地心坐标系是不能完全取代地平坐标系的。问题是今后要求天文测量的精度更高，尤其是特种工程中的天文定位测量，其精度要求远远高于大地测量的要求，因此天文测量的技术必须适应时代的需要。过去三十年，我国测设了不少拉伯拉斯点，皆说方位角精度低了，到底低在哪里？为此我们整理发表二十年前的部份试验结果，当有可供借鉴之处。

一、观 测 的 方 法

(1) 主要仪器

全能经纬仪：	Wild T4	No.37435	No.48973
	AY 2/10	No.10144	No.10090
经纬仪：	Wild T4	No.26668	No.52967

* 参加试验观测的除文中提及的观测员外，还有胡朝明、高衍估、石君一、张荣安、汪铁雄、仲跻祥诸同志。

** 韩天芑、倪定洲、连文彬、谢安民，文中将分别以 Han, Ni, Lian, Xie 表示之。

(2) 试验观测的场地

试验观测工作在陕西省宝鸡基线网扩大边的二个端点——肖村和大山进行，边长 22 公里。试验场地位于陕北黄土高原边缘，南端点肖村地处高原上，海拔约 800 米；北端点在大山顶，海拔约 1400 米，两地互相通视。测区气候情况属于大陆性气候，温度日温差较大，可达 20℃。正式观测工作大部份在 1959 年 9 月间进行，该月份气候比较干燥，日间相对湿度约在 60—70% 附近，夜间相对湿度约在 70—80% 附近。测区北端点多北风，而南端点则多西风。这似乎与季节和地形有关，夏秋之交，地温已接近或高于气温，地面开始散热。北端点东侧是群山连绵，西侧则是平原；而南端点的东侧百米处就是河谷，西侧是大片正待收割的高粱和玉米。因此环境因素的不对称形成了风向和折光向量的不同。在观测光段(上午 7^h—10^h，下午 16^h—18^h30^m，晚 20^h—2^h) 的温度约在 10—18℃。

(3) 观测纲要

除去轴颈外，全能经纬仪的其余部份均按当时有关细则的规定进行了检验，挂(跨)水准器均于水准检验器上按华西里耶夫法进行检验并测定其格值。检验结果：除去 Wild T4 No. 37435 部份度盘位置读数不清楚以外，其他均合格，不过仪器的照准部偏心差，Wild T4 型仪器偏大了一些，达到 120″ 左右。

为了考察人差，每架仪器都有二个观测员。为了考察仪器差，每个观测员又都使用二种类型的仪器。为了考察建国初期用 Wild T3 经纬仪施测的方位的情况，每个观测员又都使用 T3 经纬仪观测。为了考察白天与黑夜观测结果的较差，每个观测员使用每架仪器在白天与黑夜都各测 18 测回 (T3 仪器除外)。为了避免在各观测光段中测回数分配不均匀，规定每光段只观测三测回，不论白天或黑夜，均使 18 测回均匀分配于三天六光段内(白天以半天为一光段，夜间则一个晚上作二个光段)。在观测中我们作了不少的补充规定，诸如每光段中测回应按盘左、盘右，……的次序操作；18 测回中测微鼓读数之和要少于一周；观测目标应在望远镜视野的同一位置等等，都为后来我国订定野外作业细则时所采用。至于 T3 经纬仪，细则没有规定，我们则按“双测回”进行。T3 仪器也在瞄准极星前后读记水准器以改正垂直轴的倾斜。T3 仪器观测 36 测回，并均匀分布于三个夜间。

仪器水平度盘的变换为：

仪器类型	T4	AY	T3
度盘变换数	$10° + 4'$	$10° + 5'$	$5° + 4'$

光段与测回分配如表 1 所列。

表 1

测回 / 光段 (日 夜)	I	II	III	IV	V	VI
日	4, 5, 6	10, 11, 12	16, 17, 18	1, 2, 3	7, 8, 9	13, 14, 15
夜	1, 2, 3	7, 8, 9	13, 14, 15	4, 5, 6	10, 11, 12	16, 17, 18

二、成果的分析比较

1. 人差和仪器差的问题

(1) 人差和仪器差

这一问题在 1959 年，特别是方位角中的人差还不是为人们所能普遍接受，随着时间的推移，现在已为大家所确认。从下面的仪器差和人差(表 2，3)以及拉伯拉斯方位角的表中(依据附于本文末的各附表组成)，不难看出：①不论从单向观测的结果，还是从正反方向组成的拉伯拉斯方位角的结果，AY2/10 型仪器的方位角观测结果普遍大于 Wild T4 型仪器，而其差值也因仪器而异，可达1″的数量级。关于 Wild T4 No.22706 的结果是因为只有夜间结果(这是我国最早用全能经纬仪 Wild T4 按规范测定的天文方位角)，这是另一种情况，下面将要讨论。②同一架仪器，不同的观测员之间存在着比较显著的人差，从结果来看，虽也只是 1″ 的数量级，但是人差要略大于仪器差。③不论是仪器差或人差，Wild T3 型仪器都要比 T4 或 AY 型大上一倍。

表 2　正反方位角成果表(按仪器分)

方　　向	肖　村 ⟶ 大　山			大　山 ⟶ 肖　村		
观测值平均 / 观测员 / 仪　器	Han, Ni	Lian, Xie	Han	Han, Ni	Lian, Xie	Han
Wild T4　No. 37435	38.″98			8.″70		
AY2/10　No. 10090	40.67			8.90		
Wild T3　No. 26668	39.28			9.96		
Wild T4　No. 48973		39.″23			8.″61	
AY2/10　No. 10144		39.91			8.73	
Wild T3　No. 52967		41.57			8.85	
Wild T4　No. 22706*			40.″07			8.″76
T4-AY	−1.69	−0.68		−0.20	−0.12	
T4-T3	− 0.3	− 2.3		− 1.3	− 0.2	
AY-T3	+ 1.4	− 1.7		− 1.1	− 0.1	

* 系 1954 年测定

表 3　同一仪器上两观测员观测结果之差

方　　向	观测平均值 / 观测员 / 仪　器	T4	AY	T3	T4	AY	T3
肖村⟶大山	Han, Ni	−0.″62	−1.″76	+0.″09			
	Lian, Xie				−0.″46	+0.″14	+1.″30
大山⟶肖村	Han, Ni	−0.73	+0.01	+1.29			
	Lian, Xie				+1.14	−0.46	+2.52

表 4 拉伯拉斯方位角及自由项

仪 器	Wild T4						AY 2/10				Wild T3			
	No. 48973		No. 37435		No. 22706*		No. 10090		No. 10144		No. 52967		No. 26668	
观 测 者	Lian	Xie	Han	Ni	Han		Lian	Xie	Han	Ni	Lian	Xie	Han	Ni
A	39.″63	39.″29	39.″04	39.″71	39.″95		39.″78	39.″94	39.″89	40.″76	41.″70	39.″80	40.″50	39.″81
ω	−1.″26	+0.″34	−0.″74	−0.″87	+0.″23		+0.″40	−0.″20	−0.″19	+1.″58	+1.″03	+2.″25	−2.″36	−1.″16

* 系 1954 年所测定,只有夜间的观测结果

(2)极星亮度不同的影响

1960 年 8 月,我们在昆仑山长江源头的沱沱河畔以极星 αUMi($\alpha=2^h11^m$, $\delta=89°10'$, mag. = 2.12) 和另一颗近极星 λUMi($\alpha = 17^h45^m$, $\delta = 89°03'$, mag. = 6.55) 进行了若干测回的对比观测,限于时间和工作条件,没有能进行一个完整的拉伯拉斯方位角的观测,只利用了相同的度盘位置,试测了六测回,结果如表 5。这两颗星的地平高度相同,离极度亦相同,只是它们的亮度差异较大。以 T4 型仪器言,观测 αUMi 时,动丝是去平分该星,在动丝两侧还可露出星影,而观测 λUMi 时,动丝完全可以遮住星影,在这种情况下,它们的方位角观测结果差异只是 0.″5,这与观测工作的谨慎和熟练有关。实际测定方位角时,我们不会去观测 λUMi,但是当天气情况不佳在 αUMi 被云层遮掩时我们进行抢测就会遇到亮度相差悬殊的问题。

表 5 观测不同亮度极星的方位角结果

方 向	观 测 员	测回序号	方 位 角 值	
			αUMi	λUMi
基北 ↓ 基南	Han	9	40.″25	41.″45
		10	42.00	45.75
	仪 器	11	43.51	43.91
		12	44.04	43.78
	Wild T4 No. 37435	13	42.85	41.17
		14	43.14	42.97
		平 均	42.63	43.17

从以上资料分析来看,不同仪器,不同观测者,如果再观测不同亮度的极星,使所得方位角的成果具有不应有的 1″—2″ 的误差完全是可能的。即使是 1″(更不要说是 2″—3″)的系统误差,对于一个锁段的横向控制误差已可达 $1\times\sqrt{2}\doteq 1.''5$, 这是允许观测误差的极限,已影响到天文-大地网的控制精度。如果对于天文大地网原来是用 Wild T3 型仪器观测方位角的话,当然只有应用全能经纬仪重测。

对于仪器差产生的原因,我们认为可有下列几种: ①丝网的动丝有粗细 (AY 仪器的动丝比 T4 仪器的要粗),由瞄准误差带入;②度盘的直径误差未能很好的消除,依靠变换度盘的办法不能完全消除度盘的直径误差,不同测回之间常可觉察到明显的度盘直径误差。总的说, AY 型仪器比 T4 型仪器的误差要大,但是 T4 No.37435 在肖村—大山方

向上第 15 测回的度盘直径误差已超限许多，度盘位置变换 1° 后就好了。因此正规作业中，详细检验度盘直径误差并加以改正十分重要。③仪器常数，例如水准器的性能也会引起系统误差。这次我们没有能做这一试验，根据 1958 年我们在按东西星等高法测时中，在一架全能经纬仪上同时使用二个泰尔各特水准器，不同水准器之间引起 0.008 的系统差。如以同样数量来推论对方位角的影响为 ≈0″.3（纬度 35° 地区）。④水平轴颈不为几何圆是产生仪器差的另一重要原因。这一问题在观测相同高度的二个目标时可以不存在，当二个目标的高度相差悬殊时，这一误差就显现出来了。以 T4 和 AY 型仪器论，如果轴颈有 1 微米的误差，在最不利情况下，就可产生 1″ 的误差，如果同样的轴颈误差在 T3 仪器上，就将产生 3″ 的误差。这类误差在一个基线网上是一个系统误差（因两端点的纬度可认为相同），在不同纬度可有不同的误差。⑤仪器机械结构的不同，即使用同样的操作程序也会引入不同的系统误差。如像观测北极星时的倒挂水准器，转动测微器等都可因操作不谨慎而触动仪器，文末的附表 4 是当北极星位于大距附近，二次瞄准极星（不必移动望远镜的水平方向）后水平度盘读数之互差，表中数值也包含读数误差，但较大者无疑是操作时已触动了上盘。

对于人差，在这次试验观测中人差值的变动比较大，这可能与这次试验中新观测员居多有关。天文方位角的人差来源不外乎：①测定地面目标与极星间的水平角；②瞄准北极星的时刻记录。对于后者，令误差影响为 df，则

$$df = \cos q \sin p dT,$$

式中 q 和 p 分别表示星位角和极距，$\cos q < 1$，$\sin p = 0.01$（以 $p = 50'$），因此当极星中天时观测，若时刻记录误差为 0.5，则 $df \leqslant 0''.1$。如果以 18 测回论，df 可小于 0″.02，可以不予考虑。因此人差的误差来源主要是前者，在测定地面目标与极星之间的水平角时，瞄准地面目标的误差较小，这是因为地面目标的高度角很小（＜3°），因而仪器误差影响也小。而瞄准极星时高度角大，而且是运动着的目标，这便是人差产生的主要来源。因为这时视准差变化对方位角的影响与极星天顶距的余割成正比，这对于我国北方地区测定天文方位角时人差影响更为显著。地面目标亮度与极星亮度相差悬殊时，也是人差的重要来源。由文末附表 3 可以看到由观测地面目标的视准差 $C_{地}$ 与观测极星所得的 $C_{星}$ 有明显的差异，不论是白天的观测抑或是夜间的观测，也不论是 T4 型或是 AY 型仪器，$C_{星}$ 普遍大于 $C_{地}$。这一现象有观测员的瞄准问题，而更主要的是仪器校正问题，我们将在下面讨论。

2. 地理条件和气象因素对观测结果的影响

（1）日间观测与夜间观测

从文末附表 1 可看出日间观测与夜间观测的方位角值有显著的差别，其值约在 1″ 左右，夜间观测值普遍大于日间观测值。亦即日间与夜间具有不同的折光向量，对整个测区来说，有偏西的折光向量。为了削弱折光影响，日夜测的测回数宜 1:1。

（2）气温的变化对视准差的影响

统计了全部测回的仪器视准差与空气温度的关系，求得它们的回归表达式与相关系数如表 6 所示，如果令 $r \geqslant 0.5$ 才表示温度对视准差变化有较显著的影响，那末根据

表列各仪器的 $r \geqslant 0.5$ 的频次如图 1 所示,观测员 Han、Ni 所使用的 T4 No.37435 在 8 组温度与视准差变化的关系中其中 7 组有较好的相关，AY No.10144 在 8 组关系中 5 组有较好的相关。而 Lian, Xie 所用 的仪器，不论是 T4.型还是 AY 型仪器，温度和视准差的变化可以说基本都不相关,这可能有人的因素在内,不一定是仪器的问题。从表 6 中还可看出，不同类型的仪器视准差与温度变化的关系有很大的差异，诸如①温度和视准差变化的相关性,在 T4 型仪器是负相关，AY 型仪器是正相关；② T4 型仪器温度每变化 1℃，视准差平均变化 0.″15，而 AY 型仪器则变化 0.″27，比 T4 仪器要大一倍；③从回归表达式的常数项得出 T4 仪器的视准差比 AY 仪器的视准差要稳定得多，T4 型仪器的视准差不论观测者是谁,也不管测站地点，视准差变动不大，AY 则因人因地而有较大的变动。视准差的稳定与否，直接影响到方位角测定的精度。AY 型仪器温度对视准差

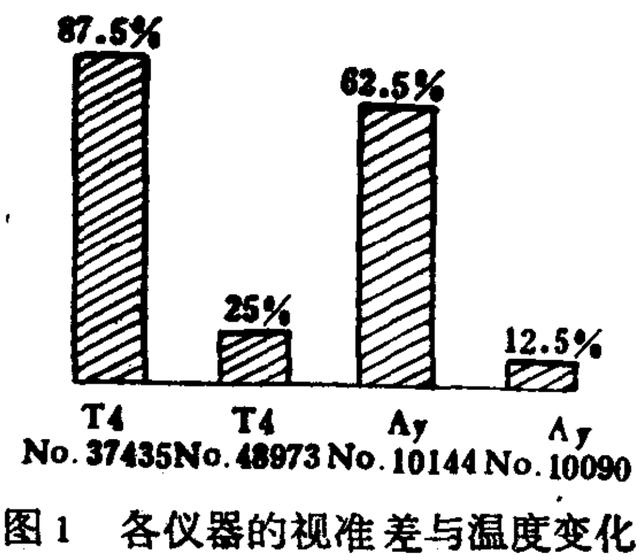


图 1 各仪器的视准差与温度变化的 $r \geqslant 0.5$ 占全部关系中频次的百分数

表 6 视准差与温度变化的回归表达式及其相关系数

方向	观测员	Wild T4 No. 48973	AY No. 10090
肖村→大山	Lian	$r = 0.01$ $C_{地} = +11.''43 - 0.''00T$ $r = 0.03$ $C_{垂} = +12.95 - 0.''00T$	$r = 0.33$ $C_{地} = -7.''83 + 0.''26T$ $r = 0.27$ $C_{垂} = -5.50 + 0.15T$
	Xie	$r = -0.02$ $C_{地} = +12.29 - 0.02T$ $r = 0.47$ $C_{垂} = +10.15 + 0.09T$	$r = 0.43$ $C_{地} = -4.96 + 0.15T$ $r = 0.58$ $C_{垂} = -3.42 + 0.25T$
大山→肖村	Lian	$r = -0.52$ $C_{地} = +12.81 - 0.14T$ $r = -0.60$ $C_{垂} = +16.77 - 0.33T$	$r = 0.19$ $C_{地} = -6.39 + 0.07T$ $r = 0.38$ $C_{垂} = -6.30 + 0.18T$
	Xie	$r = -0.22$ $C_{地} = +12.57 - 0,09T$ $r = 0.08$ $C_{垂} = +11.12 + 0.09T$	$r = 0.34$ $C_{地} = -9.30 + 0.40T$ $r = 0.42$ $C_{垂} = -4.94 + 0.34T$
		Wild T4 No. 37435	**AY No. 10144**
肖村→大山	Han	$r = -0.73$ $C_{地} = +4.85 - 0.14T$ $r = -0.69$ $C_{垂} = +8.22 - 0.28T$	$r = 0.68$ $C_{地} = -5.08 + 0.45T$ $r = 0.72$ $C_{垂} = -4.74 + 0.45T$
	Ni	$r = -0.55$ $C_{地} = +8.12 - 0.19T$ $r = -0.86$ $C_{垂} = +11.20 - 0.34T$	$r = 0.68$ $C_{地} = -16.73 + 0.42T$ $r = 0.14$ $C_{垂} = -12.78 + 0.21T$
大山→肖村	Han	$r = -0.59$ $C_{地} = +5.72 - 0.17T$ $r = -0.30$ $C_{垂} = +4.16 - 0.09T$	$r = 0.61$ $C_{地} = -3.39 + 0.32T$ $r = 0.56$ $C_{垂} = -6.01 + 0.45T$
	Ni	$r = -0.72$ $C_{地} = +7.75 - 0.27T$ $r = -0.60$ $C_{垂} = +7.54 - 0.22T$	$r = 0.09$ $C_{地} = -1.98 + 0.03T$ $r = 0.22$ $C_{垂} = -2.75 + 0.15T$

的变化比较敏感，观测方位角更要严格遵守方位角测定的操作程序。

三、方位角测定中需要注意的问题

1. 日夜观测测回数的分配

我国现行规范规定日夜观测测回的分配可以为 8:10，这是合宜的，宜严格遵守。这次试验场上的方位角值，1954 年测定时只有夜间观测，使方位角值偏大了。

2. 视准差与人仪差

人仪差在很大程度上是包含在对目标的照准误差内，但是视准差并不能代表方位角的人仪差。我们观察 $C_{地}$ 与 $C_{星}$ 的变化，如果望远镜的丝网不是严格水平，如图 2，水平丝 HH' 与水平面有一交角 α，O 为仪器视准轴方向，O' 为丝网中心，OO'' 为天球上通过视准轴的大圆弧，aa' 为经过天顶并通过观测目标的大圆弧，OO' 为丝网中心与视准轴的距离，此时仪器的视准差 $C = OO'\cos\alpha$。从图上可以看出目标的水平角应当是 Ob，但是现在利用动丝观测的测微器上的读数是 $O'a$，而目标的实际水平角应当是 $Ob = (OO' + O'a)\cos\alpha$，因此读数是变大了。如果观测位于丝网中的 a'，测微器读数相当于 $O'a''$，显然，$(OO' + O'a'')\cos\alpha \fallingdotseq Ob$。这样，在丝网的不同位置观测，得出了同一目标的不同的水平角。如果正倒镜的观测目标都位于 a'，虽然能抵消由此而产生的误差，可是变更了视准差 C 值，特别在观测极星，当天顶距为 z 时，误差还将扩大 $\csc z$ 倍。如果正倒镜观测目标不能在丝网中的同一位置上，就引进了人差，同时也使 C 值变化不定。当 $\alpha \doteq 1°$，$a'a'' \doteq \frac{R}{2} \doteq 75''$（$R$ 为测微器周值），C 值近似地变动了 1″。因此仪器校正欠佳时，在进行每一测回的方位角值计算时，按每半测回检查 C 值的变化对于成果质量的分析很有必要。

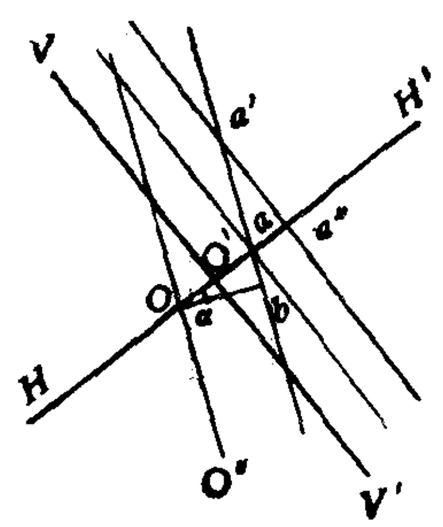


图 2　丝网没有校正水平时观测目标的情况

另外，为了减少折光向量的偏向性，对于天文方位角边的地形问题必须注意。

四、对方位角测量的一些看法

自空间技术应用于大地测量以来，今后是否仍要有大地天文测量任务？对于建立全球性的大地坐标系来说，空间技术将对经典的大地测量方法取而代之。由于我们国家的大地控制网已基本完成，经典的天文方位测量对于大地控制网也已不是迫切的任务了。但是空间技术所得到的结果与经典方法所得到的结果就参考坐标系来说是不相同的，前者是地心坐标参考系，后者是局部大地水准面的参考系，而后者参考系的结果对地球动力学、地球物理学的研究是必不可少的。测绘工作也不能全由地心坐标取代，仍要地平坐标作参考，空间技术本身也还离不开大地水准面的参考坐标系。

随着建设四个现代化任务的进展，今后天文方位角要为艰巨的工程技术服务，工程技术上对方位角精度的要求远远高于大地测量的要求。前面我们讨论到天文方位角的精度要准确到 1″ 有很大的困难，这是在边长 20 公里以上的方位角边上，没有考虑点位的形变，如果在边长仅几十米，甚至只有几米，精度要确保在 1″ 以内，这样的方位角测量任务又有多少艰巨？尽管边长可以达到几公里，要 1″ 以内的真值，该又如何办？对一些为数不很多的，精度要求更高的天文方位角任务已经摆在天文测量工作者的面前了。

附表 1 成果总表

方向	光段	仪器	观测员		仪器	观测员	
			Lian	Xie		Han	Ni
肖村—大山	日	Wild T4	38.″72±0.″18	39.″29±0.″26	Wild T4	38.″50±0.″22	38.″74±0.″35
	夜	No. 48973	39.29±0.22	39.63±0.15	No. 37435	38.85±0.27	39.82±0.26
	平均		39.00±0.14	39.46±0.15		38.68±0.17	39.28±0.22
大山—肖村	日		9.18±0.18	7.99±0.21		8.43±0.29	9.62±0.37
	夜		9.18±0.21	8.08±0.17		8.26±0.30	8.52±0.31
	平均		9.18±0.14	8.04±0.14		8.34±0.21	9.07±0.24
肖村—大山	日	AY 2/10	39.71±0.27	39.22±0.25	AY 2/10	39.03±0.36	41.64±0.27
	夜	No. 10090	40.25±0.27	40.46±0.28	No. 10144	40.56±0.29	41.46±0.39
	平均		39.98±0.19	39.84±0.18		39.79±0.24	41.55±0.24
大山—肖村	日		8.23±0.30	9.15±0.29		8.80±0.26	8.22±0.47
	夜		8.76±0.39	8.76±0.25		9.01±0.31	9.56±0.30
	平均		8.50±0.25	8.96±0.19		8.90±0.20	8.89±0.28

附表 2 肖村—大山方向拉伯拉斯方位角及其自由项

仪器	Wild T4				AY 2/10				Wild T3				Wild T4
	No. 48973		No. 37435		No. 10090		No. 10144		No. 52967		No. 26668		No. 22706
观测者	Lian	Xie	Han	Ni	Lian	Xie	Han	Ni	Lian	Xie	Han	Ni	Han
	日间观测结果												
A	39.″49	39.″18	39.″00	39.″72	39.″51	39.″72	39.″45	40.″47					
ω	−1.″54	+0.″22	−1.″01	−1.″96	+0.″40	−1.″01	−0.″85	+2.″34					
	夜间观测结果												
A	39.77	39.39	39.09	39.71	40.05	40.15	40.36	41.05	41.70	39.80	40.50	39.81	39.95
ω	−0.97	+0.47	−0.49	+0.22	+0.41	+0.62	+0.53	+0.82	+1.03	+2.25	−2.36	−1.16	+0.23
	日夜观测结果平均												
A	39.63	39.29	39.04	39.71	39.78	39.94	39.89	40.76					
ω	−1.26	+0.34	−0.74	−0.87	+0.40	−0.20	−0.19	+1.58					

附表 3　极星与地面目标视准差之比较

测站	仪器	观测员 / 视准差 / 光段	Han			Ni			Lian			Xie		
			$C_{地}$	$C_{星}$	$C_{地}-C_{星}$	$C_{地}$	$C_{星}$	$C_{地}-C_{星}$	$C_{地}$	$C_{星}$	$C_{地}-C_{星}$	$C_{地}$	$C_{星}$	$C_{地}-C_{星}$
大山	T4	日	+1.″74	+3.″27	−1.″53	+ 1.″96	+2.″85	−0.″89	+ 1.″07	+ 1.″16	−0.″09	+11.″25	+12.″36	−1.″11
		夜	+2.31	+3.66	−1.35	+ 2.28	+2.95	−0.67	+ 9.44	+10.20	−0.76	+11.11	+12.61	−1.50
	AY	日	+3.58	+3.93	−0.35	− 1.26	−0.48	−0.78	− 5.03	− 2.89	−2.14	− 2.26	+ 0.99	−3.25
		夜	+2.43	+1.29	+1.14	− 3.50	−3.58	−0.08	− 5.06	− 4.05	−1.01	− 4.11	+ 0.12	−4.23
肖村	T4	日	+2.54	+3.51	−0.97	+ 4.31	+4.50	−0.19	+11.54	+13.02	−1.48	+12.00	+12.82	−0.82
		夜	+2.31	+2.60	−0.29	+ 4.96	+5.03	−0.07	+11.16	+12.62	−1.46	+11.38	+11.71	−0.33
	AY	日	+2.30	+2.85	−0.55	− 9.14	−8.56	−0.58	− 2.56	− 1.29	−1.27	− 1.13	+ 3.34	−4.47
		夜	−1.52	−2.26	+0.74	−11.59	−12.64	+1.05	− 4.58	− 2.95	−1.63	− 2.38	+ 0.03	−2.41

附表 4　仪器上盘水平方向带动量的频次统计

仪器 / 带动误差 / 观测者		−4.″0	−3.″0	−2.″0	−1.″0	−0.″5	0.0	+0.″5	+1.″0	+2.″0	+3.″0	+4.″0
Wild T 4	Han	0	1	8	21	28	27	6	9	1	0	
No. 37435	Ni	1	3	2	5	22	15	6	2	1	0	
Wild T 4	Lian	6	3	5	2	10	6	5	2	1	3	
No. 48973	Xie	2	1	1	0	19	28	10	1	1	2	
AY 2/10	Han	0	1	10	9	15	22	5	8	4	0	
No. 10144	Ni	0	5	3	2	11	13	4	2	1	2	
AY 2/10	Lian	1	1	2	1	1	4	3	2	4	2	
No. 10090	Xie	1	1	1	12	14	10	4	4	1	1	

ON PROBLEMS OF SYSTEMATIC ERRORS EXISTING IN THE ASTRONOMICAL DETERMINATION OF AZIMUTH

Han Tianqi

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the order of magnitude and causes of formation of the instrument error and personal error existing in the determination of astronomical azimuth are analysied according to actual observational data. The relation between collimation error and azimuth error is discussed, in addition, the relation between collimation error and variation of temperature has also been analysied. It is considered that, for different instruments and observers, the systematic error of 1″—2″ can be given in the determination of astronomical azimuth.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

风对武昌时辰站 Danjon 等高仪观测的影响*

孙永庠

摘　　要

本文利用 1971—1973 年期间武昌时辰站 Danjon 等高仪的天文观测资料研究了风对测时测纬结果的影响。

文中假定钟差残差 du 与风元素之间的关系用下列关系式表达

$$du = a + bv\sin(\theta - \alpha) + cv^2\sin(\theta - \beta)$$

纬度残差 $d\varphi$ 与风元素之间有类似的表达式

$$d\varphi = a + bv\cos(\theta - \alpha) + cv^2\cos(\theta - \alpha)。$$

上列二式中 v 是风速，θ 是风向，根据资料得到如下结果：

$$du = -0^s.00026 - 0^s.00083v\sin(\theta - 45^\circ.9) + 0^s.00009v^2\sin(\theta - 59^\circ.4),$$

$$d\varphi = +0''.0019 + 0''.0096v\cos(\theta - 347^\circ.2) - 0''.0010v^2\cos(\theta - 343^\circ.5)。$$

从研究的结果表明，天文观测中风效应的产生主要是风引起观测室内气温的不均匀分布，从而造成观测室内大气的反常折射所致。

一、引　　言

利用天文观测的方法以测定精密的时间和纬度，由于视线需要穿过地球表面上很厚的大气层，而大气状态的变化例如气温、气压分布的不均匀性及其变化，以及大气成份的变动等，都会引起大气的反常折射，从而在观测成果中引进一定的误差。大气温度与气压的变化又往往是产生空气流动即风的主要原因。因此早在二十世纪初就有人注意到风对天文观测的影响问题。根据当前国际上对这一问题研究的情况来看，一般认为风对天文观测会引起一定的误差这是肯定的，但其数量则各不相同，而且对不同地点，不同仪器也各不相同。不过一般认为在测时方面最大影响能够达到 10 毫秒左右的误差，也有少数甚至达到 20 毫秒附近的。当然不同风向有不等的影响。在测纬方面，日本学者有比较多的研究，根据他们对几种不同天顶仪观测的研究，误差也能达到百分之几角秒或者更大一些。

至于风对天文观测结果产生误差的原因，到目前为止还没有得到一个比较统一的见解。归纳起来大致有以下三种看法：(1)认为风引起了观测室上空大气层的倾斜，因而造成大气的反常折射。(2)认为风引起大气层倾斜所产生的误差甚小，而主要的是风引起观

* 在本文的写作过程中，得到韩天芑同志的许多帮助，并承陈振邦和郭丰美同志协助计算，于此谨表衷心感谢。

测室内外，特别是观测室内温度分布的不均匀，从而产生反常折射。(3)认为风引起观测仪器的机械变化，从而产生误差。

在消除风效应的影响方面，也各有不同的做法。例如有的将仪器在观测室内升到一定高度，从而改善了观测成果。有的将观测室外罩以金属网而达到减小风对观测结果的影响。有的则从改善观测室附近的环境及观测室本身着手，以企图尽量减少风的影响。不过将风效应直接加入观测成果中进行修正以消除其影响的，到目前为止则只见有德意志民主共和国科学院中央地球物理研究所大地天文组(波茨坦)是这样做的。

本文的目的在于利用武昌时辰站 Danjon 等高仪（WA）的观测资料，初步分析一下风效应的影响问题，并对其产生的原因做一些初步探讨。

二、资　料

武昌时辰站是从 1970 年底才开始有风向、风速记录的。

风向风速仪是设在观测室西南，距观测室 45 米处，高出地面约 10 米。

这里，我们所采用的资料是 1971—1973 年期间共三年的观测资料。

我们对等高观测同时得到的钟差与纬度分别进行处理。

1. 钟差残差（du）的取得

根据我国授时公报所公布的（$A-O$）与分别按不同观测者取年平均值，得到

$$(O-A)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(O-A)_i}{n}$$

其次从各年所得每个观测者的每一观测值中减去各该观测者的年平均的（$O-A$）得到残差 du_0。

$$du_0=(O-A)_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}(O-A)_i}{n}$$

另外，我们考虑到为了在残差中尽量消去与风效应无关的因素，我们在 du_0 中加入地方性效应改正 δu。则有

$$du=(O-A)_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}(O-A)_i}{n}+\delta u$$

为了比较起见，我们将加入地方性效应与不加入地方性效应的两套数据一并取出，进行分析。

2. 纬度残差 $d\varphi$ 的取得

从每一纬度观测值 φ_i 中加入组间改正 σ，按半月平均点作纬度平滑曲线。从此平滑曲线上取相应于每一观测值 φ_i 的平均纬度 φ_{00}。由 φ_i 中减去相应的 φ_0 得到纬度残差 $d\varphi_{00}$。

$$d\varphi_0 = \varphi_i - \bar{\varphi}_0$$

同上面一样，为了在 $d\varphi$ 中消去地方性影响，我们利用天津纬度站所公布的我国四台站综合的 X、Y 值算出 $\Delta\varphi$，将其加到每个观测值 φ_i 上，再加入组间改正 σ，进而取半月平均点作平滑曲线，从此曲线上取出平均纬度 $\bar{\varphi}$，由此得到另一套纬度残差 $d\varphi$。

$$d\varphi = \varphi_i - \bar{\varphi}$$

这样，我们根据前述所讲的方法得到 du、du_0 和 $d\varphi$、$d\varphi_0$ 共四套数据。每套数据各共有 722 个观测结果。其中我们将风速小于 0.5 米/秒以下的观测做无风计，共有 235 个。因此有风的观测共有 487 个。

风向按 16 个方位划分。即从正北 N(0°) 起按顺时针方向计，依次排列为 NNE(22.°5)，NE(45.°0)，NEE(67.°5)，E(90.°0)，EES(112.°5)，ES(135.°0)，ESS(157.°5)，S(180.°0)，SSW(202.°5)，SW(225.°0)，SWW(247.°5)，W(270.°0)，WWN(292.°5)，WN(315.°0)，WNN(337.°5)。

各个方向的风向出现频率统计列于表 1。

表 1

风　向	N	NNE	NE	NEE	E	EES	ES	ESS	S	SSW	SW	SWW	W	WWN	WN	WNN
出现次数	35	94	22	17	25	37	63	59	32	15	20	20	7	21	5	15
百分比%	7.2	19.3	4.5	3.5	5.2	7.6	12.9	12.1	6.6	3.1	4.1	4.1	1.4	4.3	1.0	3.1

由表 1 的统计可以看出在武昌时辰站以 NNE，ES 和 ESS 的风出现为最多，其次为 EES 和N风，而以 WN 风出现为最少。不仅风向的频次是这样，而其平均风速也以 WN 方向的为最小。这种情况或与观测室的西北有大楼这一环境有关。

风向的季节性出现的统计见表 2。

由表 2 可知北风和偏北风多出现在秋、冬二季，而南风和偏南风多出现在春、夏二季。

表 2

月　份	N	NNE	NE	NEE	E	EES	ES	ESS	S	SSW	SW	SWW	W	WWN	WN	WNN
1	5	11	3	0	3	0	6	1	3	1	1	1	2	1	1	5
2	2	9	3	1	1	2	2	1	0	0	1	0	1	1	1	1
3	0	5	3	2	1	4	7	2	0	3	1	4	0	3	0	0
4	0	0	2	1	4	4	7	6	5	5	0	3	0	0	0	2
5	4	4	1	1	0	4	1	3	2	1	2	0	0	0	1	1
6	0	1	1	1	1	5	8	4	1	1	3	1	0	1	0	0
7	5	15	0	1	3	0	3	10	4	0	0	1	0	1	0	2
8	2	12	4	1	6	15	5	6	0	0	0	2	0	0	0	0
9	2	6	0	3	1	0	3	6	1	0	0	2	2	5	0	1
10	3	12	0	3	3	0	8	5	3	1	3	1	1	5	1	1
11	6	6	1	3	2	1	6	4	9	2	1	2	0	4	1	2
12	6	15	4	0	0	2	7	11	4	1	1	3	1	0	0	0
总　数	35	94	22	17	25	37	63	59	32	15	20	20	7	21	5	15

三、风对观测成果的影响

我们假定钟差残差 du 与风元素的关系由下式表达

$$du = a + bv\sin(\theta - \alpha) \tag{1}$$

若顾及风速的二次项，则由下式表达

$$du = a + bv\sin(\theta - \alpha) + cv^2\sin(\theta - \beta) \tag{2}$$

在上列二式中 a、b、c 为待求系数，α，β 为相位角，θ 为风向，以正北（N）为 0° 起算，依顺时针方向计算，v 为风速。

类似地，我们假定 $d\varphi$ 与风元素的关系由下式表达

$$d\varphi = a + bv\cos(\theta - \alpha) \tag{3}$$

顾及风速二次项的表达式为

$$d\varphi = a + bv\cos(\theta - \alpha) + cv^2\cos(\theta - \beta) \tag{4}$$

我们将所得到的 du、du_0 和 $d\varphi$、$d\varphi_0$ 分别代入上列(4)式，应用最小二乘法解得如下结果。

在测时方面有表 3:

表 3

$du = a + bv\sin(\theta - \alpha)$				$du_0 = a_0 + b_0v\sin(\theta - \alpha_0)$			
年　份	a	b	α	年　份	a_0	b_0	α_0
1971	−0.00063	−0.00072	5.5	1971	−0.00114	−0.00080	13.9
1972	−0.00028	−0.00143	64.4	1972	+0.00012	−0.00157	75.1
1973	+0.00005	−0.00033	60.5	1973	−0.00012	+0.00020	276.5
1971—1973	−0.00028	−0.00057	52.6	1971—1973	−0.00036	−0.00052	66.4

顾及风速二次项的关系式 (1971—1973年) 为

$du = -0.00026 - 0.00083v\sin(\theta - 45.9) + 0.00009v^2\sin(\theta - 59.4)$

$du_0 = -0.00031 - 0.00080v\sin(\theta - 61.9) + 0.00009v^2\sin(\theta - 42.1)$

在测纬方面有表 4:

表 4

$d\varphi = a + bv\cos(\theta - \alpha)$				$d\varphi_0 = a_0 + b_0v\cos(\theta - \alpha_0)$			
年　份	a	b	α	年　份	a_0	b_0	α_0
1971	+0.″0053	+0.″0070	329.°8	1971	−0.″0020	+0.″0106	336.°6
1972	−0.0018	+0.0116	322.3	1972	+0.0195	+0.0096	326.6
1973	+0.0015	+0.0043	74.2	1973	−0.0028	+0.0056	64.8
1971—1973	+0.0018	+0.0050	341.2	1971—1973	+0.0055	+0.0050	17.8

顾及风速二次项的关系式 (1971—1973 年) 为

$d\varphi = +0.''0019 + 0.''0096v\cos(\theta - 347.2) - 0.''0010v^2\cos(\theta - 343.5)$

$d\varphi_0 = +0.0056 + 0.''0081v\cos(\theta - 357.0) - 0.0009v^2\cos(\theta - 337.4)$

在无风的情况下有下列结果(表 5):

表 5

年　　份	du	du_0	$d\varphi$	$d\varphi_0$
1971	+0^s.0009	+0^s.0014	+0″.005	+0″.014
1972	−0.0003	+0.0010	+0.014	+0.023
1973	+0.0016	+0.0023	+0.001	+0.012
1971—1973	+0.0009	+0.0016	+0.006	+0.016

根据上面所得到的一系列关系式，我们可以绘出各年及(1971—1973)年风对测时、测纬影响的曲线见(图 1a)、(图 1b) 和(图 2a)、(图 2b)。

从所得的结果，我们可以看出风对武昌时辰站的天文观测有比较明显的周期性影响，而其振幅则不很大。

一般看来，在无风的情况下，不论测时或测纬都偏大了，即 du 和 $d\varphi$ 都是正值（见表 5)；而在刮南风及偏南风，特别是东南风时则相反，即不论测时或测纬均偏小，du 和 $d\varphi$ 都为负值。从影响的振幅来看，南北风影响振幅较大，看来是影响的主要风向，而东西风则较小。产生这一现象的原因，我们初步认为主要是风引起观测室内气温变化而产生的。我们的观测室比较简陋，是用砖墙建成的，热容量较大。在观测室的西边接有观测员休息室一间，因此观测室的墙壁温度一般是东墙高于西墙，也就是说在仪器附近的气温东边高于西边。此外在观测室的西北角，放有计数器一台。计数器在工作过程中不断散发出热量，这就使得西北角的气温一般偏高。在这种情况下，当无风时，室内的气温一般是北方高于南方；东方高于西方。因而造成室内空气层向东北方向倾斜，从而天顶偏向东北。du 和 $d\varphi$ 就表现为正值。在有风的情况下，如果刮南风，尤其是吹东南风时，计数器发出的热量被风吹散了，这就相对于无风时的情况，西北方向的气温就偏低了，空气层就向西南偏，即天顶偏向西南。此时表现为 du 和 $d\varphi$ 就都为负值。反之当吹北风或偏北风时，室内南部散热较快，于是北方气温相对于南方为高，而此时东墙温度又高于西墙，于是室内空气层就偏向东北，即天顶向东北偏，因而就出现 du 和 $d\varphi$ 均为正值的现象。

在加入地方性效应改正与不加入地方性效应改正的两种结果中，可以看出图形基本一致，但加入地方性效应改正后图形得到很少量的修平。为什么这样？我们认为是，由于我们将资料按月分段平均，这就在平均值中反映不出风对观测成果季节性影响。因此我们这种做法有使对观测成果的影响缩小了的可能。

四、小　　结

由上面结果中可以得到以下几点结论：

①风对武昌时辰站 Danjon 等高仪观测有影响。在一般情况下南北风向影响是主要的。

②风效应产生的主要原因是风引起观测室内气温的不均匀分布。由于气温的不均匀而导致空气密度的不均匀，因而造成观测室内的大气反常折射，从而引起风效应的产生。

③基于上面的原因，对观测室的要求应当对其周围环境——不论是地形或地物应有对称性。最好能开阔一些。而对观测室本身的要求则是通风性要好，以利室温容易均匀，

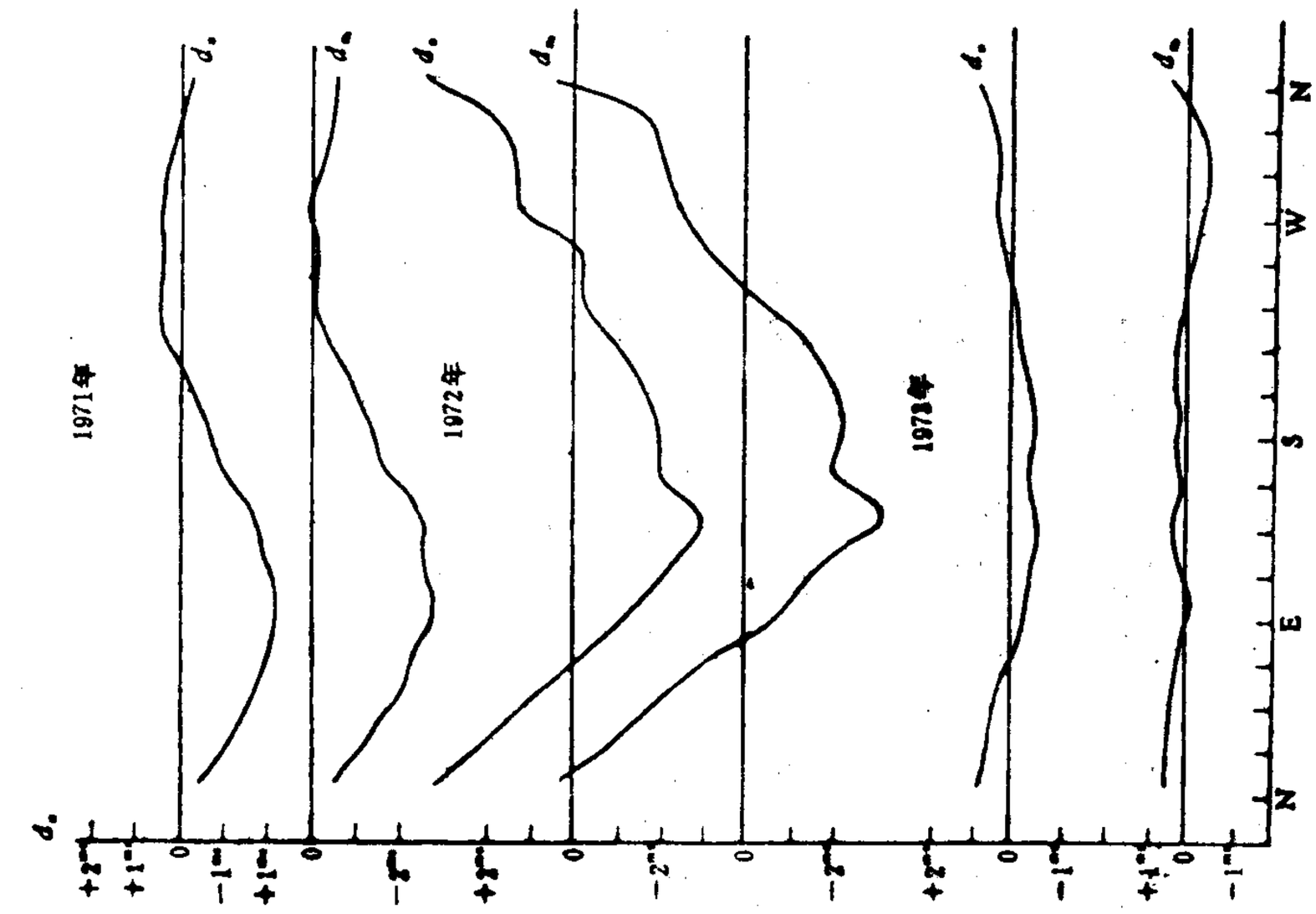
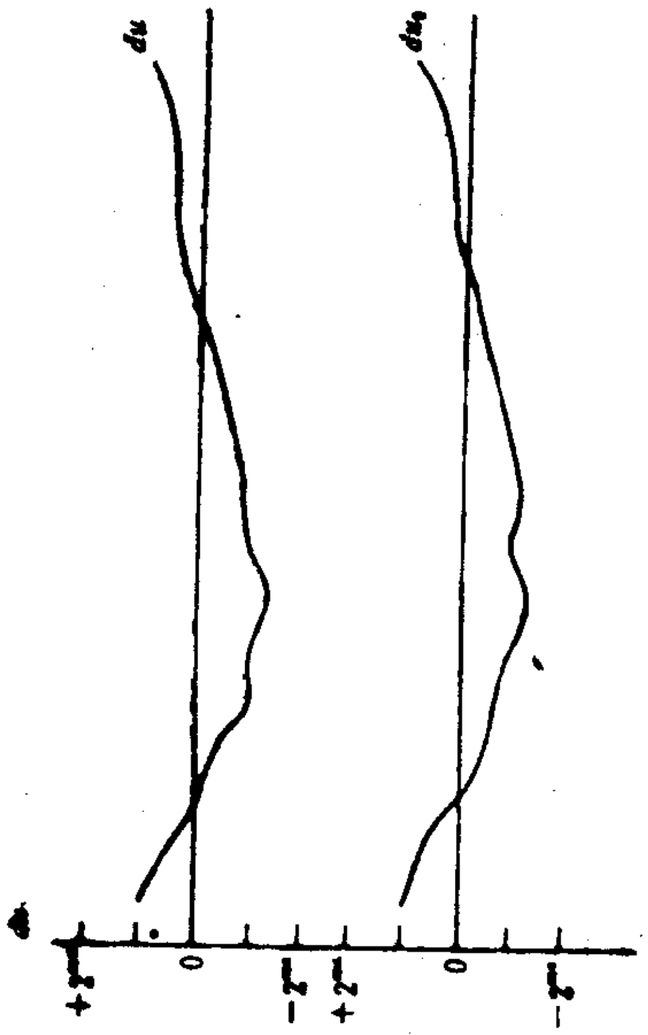
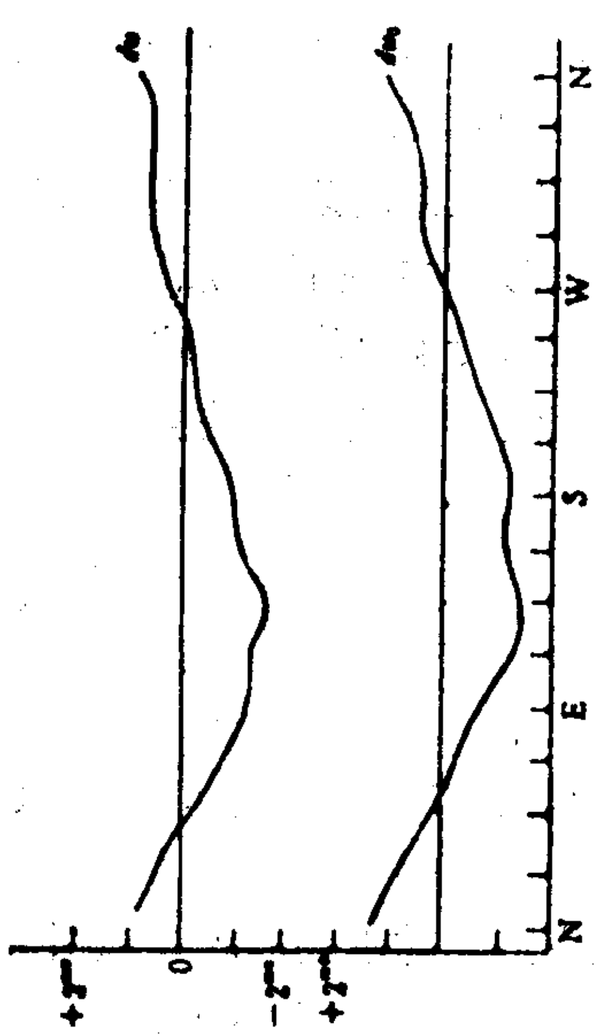


图 1b 风对 WA 测时的影响(顾及风速一次项)



(1) 顾及风速一次项



(2) 顾及风速二次项

图 1a 风对 WA 测时的影响(1971—1973 年平均)

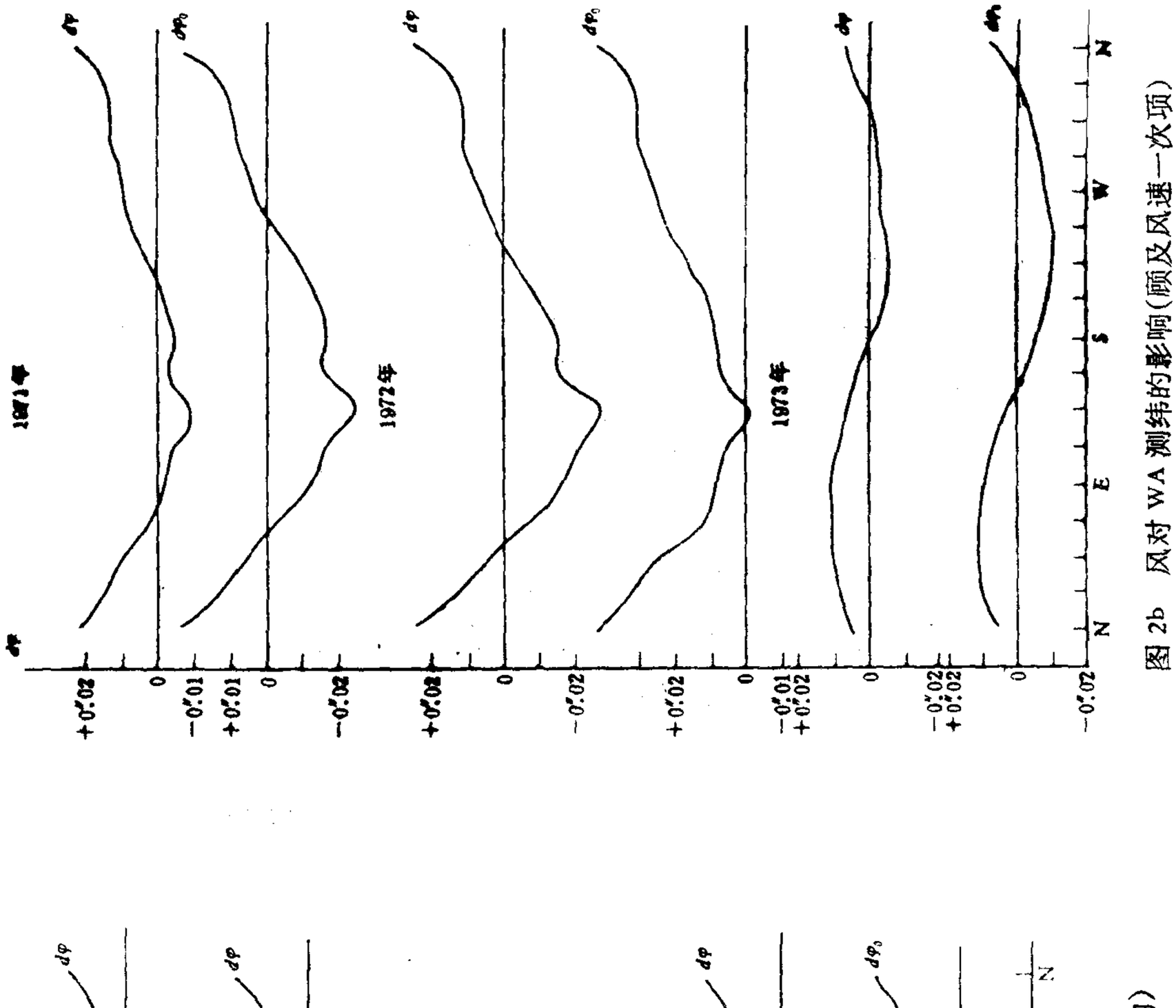


图 2b 风对 WA 测纬的影响(顾及风速一次项)

(1) 顾及风速一次项

(2) 顾及风速二次项

图 2a 风对 WA 测纬的影响 (1971—1973 年平均)

以减少室内反常折射的产生。为此，我们建议观测室最好采取双层百叶箱式的室壁，而屋顶则以对称打开为好。

④如果观测室的内外环境无条件对称，那么可以通过长期的观测，积累资料，进行地方性效应修正，观测质量可能得到某种程度的改善。这就要求观测室周围的环境有个相对稳定。

参 考 文 献

[1] Чжэн Чжун-лян, Исследование "Ошибки Вечера" и "Эффекта Ветра" по наблюдениям на новом Пулковском инструменте ППИ-I, *ИГАО в Пулкове*, **XXIII**, 1, 171 (1962), 41—55.

[2] М. П., Мищенко, О влиянии ветра и местных рефракционных аномалий на точность определения времени, *Труды Астрономической обсерватории*, **XX**, (1964), 208—213.

[3] П. Н. 达尔果夫：子午仪测时，邹仪新、李华、苗永睿、王政序合译，科学出版社，(1958)，265—274。

[4] 切田正実，PZT によお緯度観測に及ぼす风の影響，緯度観測所彙報，第5号，(1965)，31—36。

[5] 高橋久太郎，緯度観測に及ぼす Wind Effect について，緯度観測所彙報，第5号，(1965)，55—60。

WIND EFFECT ON THE OBSERVATIONAL RESULTS WITH A DANJON ASTROLABE AT WUCHANG TIME OBSERVATORY

Sun Yongxiang

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the influence of wind on astronomical observations with a Danjon Astrolabe during the period 1971—1973. At Wuchang Time Observatory of the Institute of Geodesy and Geophysics has been studied.

The relation between the residuals of clock correction du and wind elements has been assumed to have the following form:

$$du = a + bv \sin(\theta - \alpha) + cv^2 \sin(\theta - \beta).$$

Similarly, the relation between the residuals of latitude $d\varphi$ and the wind elements has the following form:

$$d\varphi = a + bv \cos(\theta - \alpha) + cv^2 \cos(\theta - \alpha)$$

Where, v is the velocity of the wind, and θ is the azimuth of the wind.

On the basis of observational data, the results calculated by the method of least squares have been obtained as follows:

$$du = -0^s.00026 - 0^s.00083\, v \sin(\theta - 45^\circ.9) + 0^s.00009 v^2 \sin(\theta - 59^\circ.4),$$
$$d\varphi = +0''.0019 + 0''.0096\, v \cos(\theta - 347^\circ.2) - 0''.0010 v^2 \cos(\theta - 343^\circ.5).$$

It can be seen that, the wind gives rise to a nonuniformity of temperatural distribution in the observationalroom, so that the anomalous atmospheric refraction in the room is produced.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

利用我国各台站纬度观测资料对张德勒周期的分析

钱 益 明

摘　　要

本文主要利用武昌时辰站历年来纬度观测资料对平纬、张德勒周期、位相、振幅等问题进行了分析，并利用全国各台站的地极坐标按极轨道运动来推导张德勒周期、得出武昌站张德勒周期为 1.177 年或430天。综合地极坐标周期为 1.175 年。按武台周期计算洛夫数 $k=0.275$。

武昌时辰站于 1970 年开始利用 Danjon 等高仪的纬度观测值以单台站纬度观测资料计算瞬时地极坐标 x、y，并参加我国综合地极坐标系统。计算单台站瞬时地极坐标 x、y 时是利用奥洛夫提出的单台站法来求得。

我们采用以 BIH 系统的地极坐标为标准求得单台站法计算地极坐标时的地方项 z 项，1970—1972 年计算地极坐标时我们采用 1965—1969 年纬度观测成果来推求地方项 z 项，1973—1974 年计算时采用 1965—1972 年纬度观测成果来推求地方项 z 项，1975 年至目前计算时采用 1968—1973 年纬度观测成果来推求地方项 z 项。

计算地极坐标 x、y 时，我们采用的平纬是根据奥洛夫法求平纬公式：

$$\varphi_{t+7.5}=\frac{1}{20}\sum_{t=0}^{t=4}(\varphi_t+\varphi_{t+5}+\varphi_{t+6}+\varphi_{t+11})$$

我们采用 1965—1969 年纬度观测资料加组间改正后，利用上述公式求得平纬的平均值等于 30°32′28.″915N。

下面我们将历年来资料对平纬、张德勒周期等问题进行讨论。

1. 平纬的变化

从历年来资料看，武昌站平纬变化较大。特别是从 1964—1966 年平纬变化呈直线变化由 28.″70 变化到 28.″90。由 1966—1975 年 9 月期间的平纬资料来看，平纬变化在

表 1　武昌站历年平纬变化情况

时　　间	变　化　范　围	最大变化值
1966 年—1968 年 4 月	28.″945—28.″892	0.″053
1968 年 4 月—1970 年 8 月	28.″920—28.″880	0.″040
1970 年 8 月—1973 年 2 月	28.″923—28.″904	0.″028
1973 年 2 月—1975 年 4 月	28.″950—28.″904	0.″046

28″.880 到 28″.950 之间。另外，我们将七年分时段来看，从 1966—1968 年 4 月，1968 年 4 月—1970 年 8 月，1970 年 8 月—1973 年 2 月，1973 年 2 月—1975 年 4 月，平纬变化曲线呈正弦曲线形式，见表 1 及图 1 。

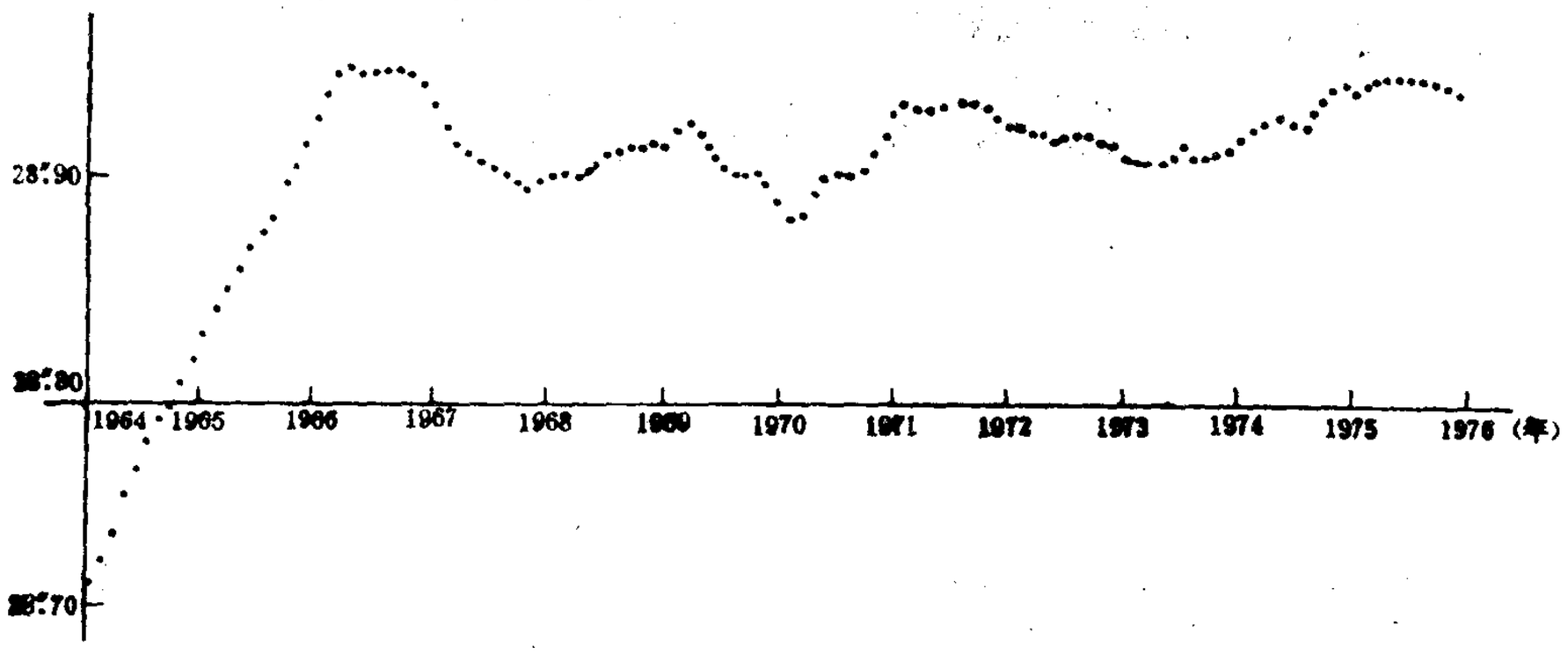


图 1　武昌站历年来平纬变化

2. 张德勒摆动的位相和振幅

历年来位相和振幅变化见表 2 及图 2 图 3

表 2　武昌站历年张德勒摆动的振幅和位相

年　份	振　　幅	位　　相	年　份	振　　幅	位　　相
1970 年	0″.144—0″.175		1975 年	0″.119—0″.147	8°22′—18°12′
1971 年	0″.152—0″.188	13°44′—20°07′	1976 年	0″.121—0″.153	11°15′—17°04′
1972 年	0″.116—0″.170	13°20′—19°47′	1977 年	0″.092—0″.144	9°35′—22°59′
1973 年	0″.095—0″.127	11°09′—16°54′	1978 年	0″.208—0″.152	10°24′—17°39′
1974 年	0″.108—0″.133	12°44′—19°19′			

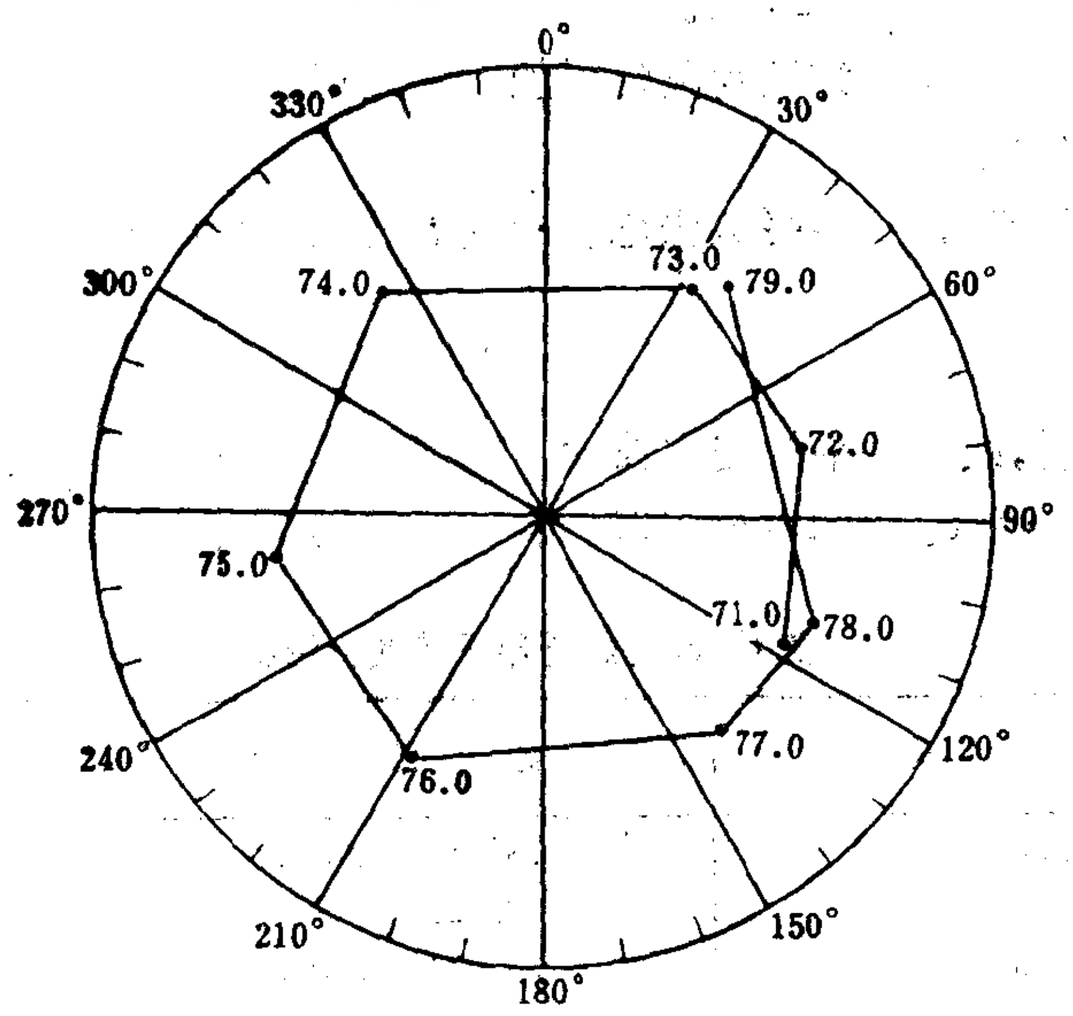


图 2　武昌站历年来张德勒摆动的位相变化

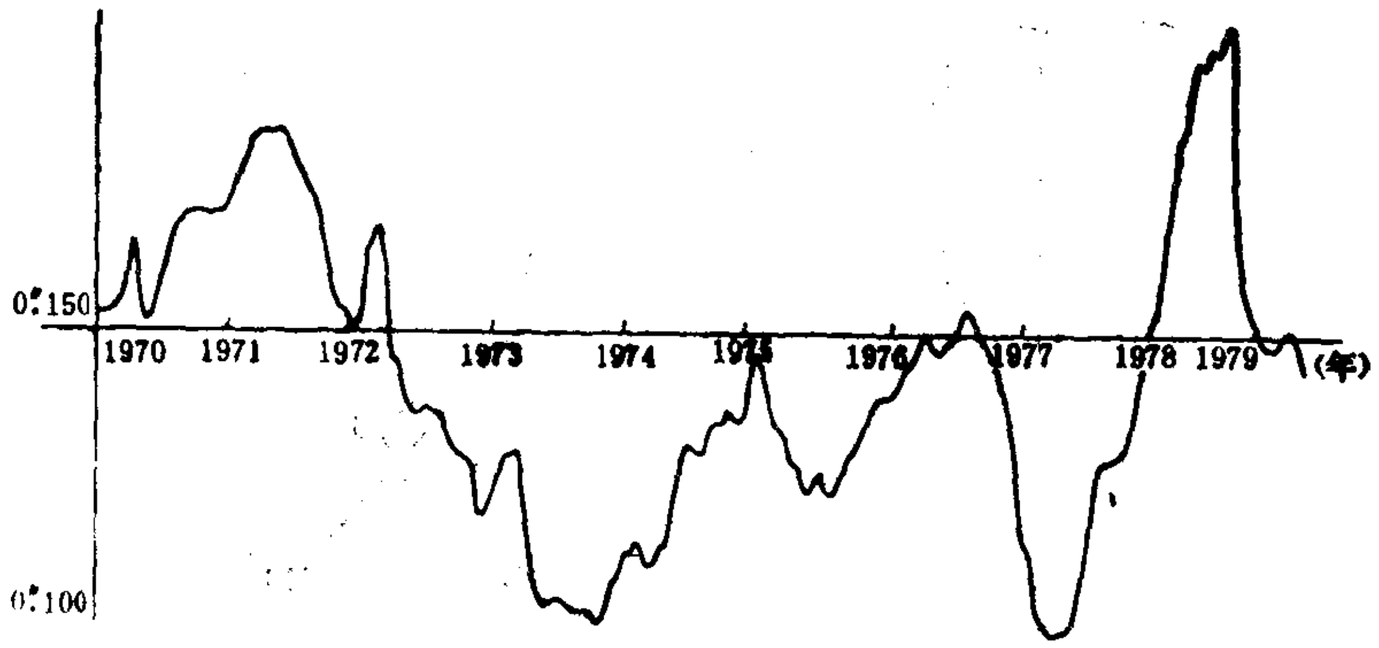


图 3　武昌站历年来振幅变化

3. 张德勒周期的变化对计算地极坐标的影响

由奥洛夫公式知道:

$$\Delta\varphi_c = C\cos(\beta t + c + \lambda)$$

式中 C 为振幅，c 为位相，λ 为经度。

如以 0.05 年为单位 $t = 0, 1, 2, \cdots 23$, $\beta = 15°$

以 0.1 年为单位 $t = 0, 1, 2, \cdots 11$, $\beta = 30°$ 展开上式可得:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_c &= C\cos(\beta t + c + \lambda)\\ &= C\cos(c+\lambda)\cos\beta t - C\sin(c+\lambda)\sin\beta t\end{aligned}$$

目前我们计算地极坐标时用 1.2 年周期，取 $\beta = 30°$。若我们取用周期大于 1.2 年或小于 1.2 年时，也就是说当 $\beta > 30°$ 或 $\beta < 30°$ 时，对我们计算地极坐标有什么影响呢？为此，我们以 1978 年为例计算二套地极坐标，并求其中误差，可得下列数值:

$\beta = 30°$　$t = 1.2$ 年　$m_x = \pm 0.031$　$m_y = \pm 0.021$

$\beta = 30°.59$　$t = 1.177$ 年　$m_x = \pm 0.031$　$m_y = \pm 0.021$

由上式数值可知，张德勒周期变化对地极坐标精度影响甚小。

4. 推求张德勒周期

奥洛夫指出张德勒分量是圆周运动，振幅和位相是变化的。我们武昌站自 1966—1978 年以来地极坐标按极轨道运动来推导张德勒周期。从每年 0.00 的各个位置来看，(见表 3 及图 4) 六年期间极的外形差不多呈六角形，而六角形连接起来的时间间隔并不是完全呈一圆周，而有一边被推迟的。根据 1966—1978 年期间的极轨迹，连结序号 1 和 4 的矢量，这一连线近似地平分了上述的似六角形，顺次连结序号 2 和 5 的矢量，3 和 6，4 和 7 ……的矢量，这些连线与某一基准线所构成的角度的年变化，可认为是极轨迹张德勒摆动的年移动角，本文取 $-y$ 轴为基线，量取各连线与 $-y$ 轴顺时针旋转方向的角度，其递差即为移动角，见表 3(a)，3(b) 及图 4。

由表 3(a)，3(b) 得出地极的张德勒摆动的年滞后平均为 54°.30，因此其闭合周期为 $\frac{360}{54.30} = 6.63$ 年。一年内张德勒摆动使地极摆动 360°—54°.30，而每年的滞后量为

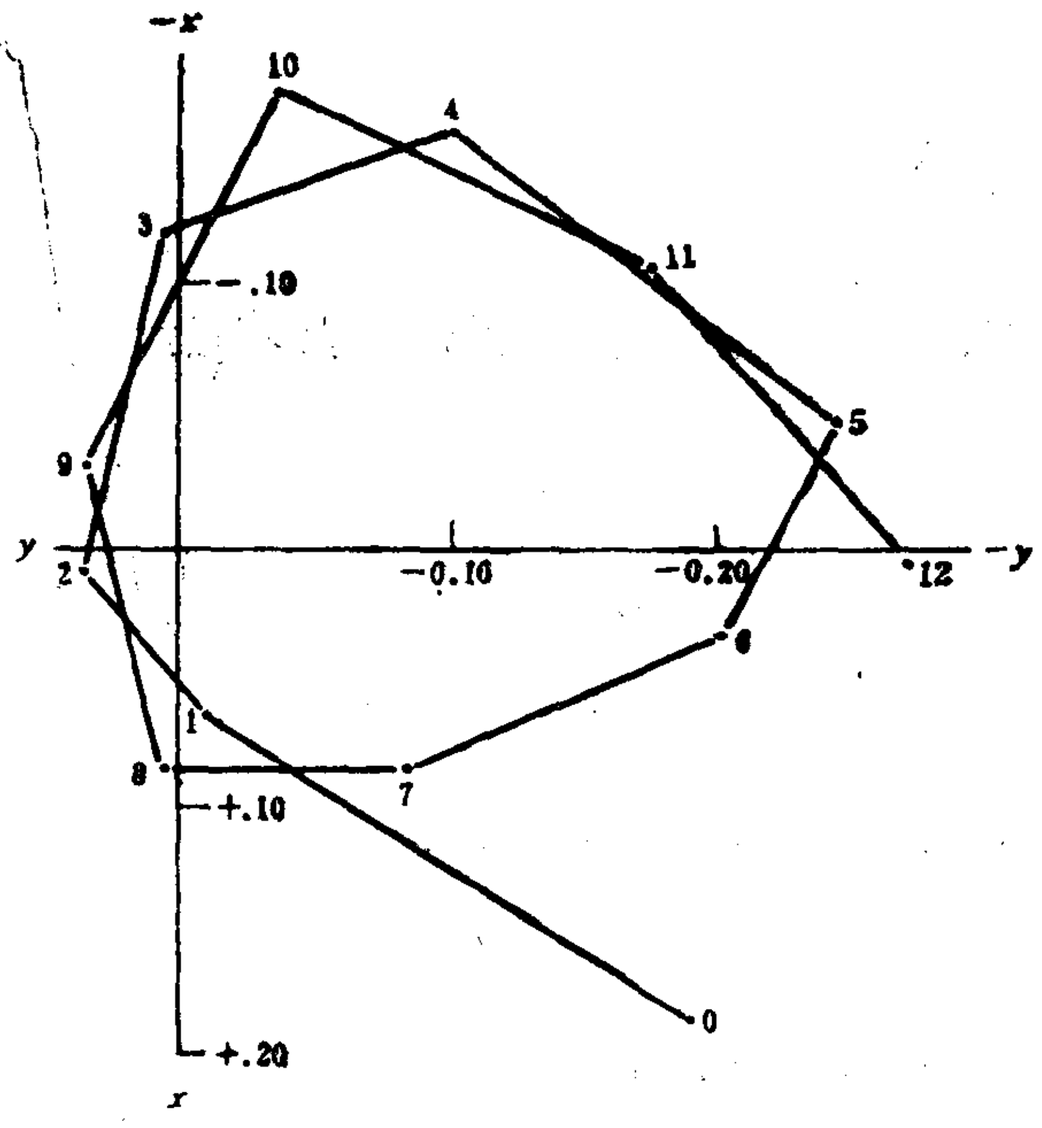


图 4

表 3(a) 各年年首的 x, y 值

序 号	年 份	x	y
0	1966.0	+0.180	−0.195
1	1967.0	+0.063	−0.009
2	1968.0	+0.009	+0.037
3	1969.0	−0.120	+0.006
4	1970.0	−0.158	−0.102
5	1971.0	−0.047	−0.246
6	1972.0	+0.033	−0.203
7	1973.0	+0.085	−0.082
8	1974.0	+0.087	+0.006
9	1975.0	−0.031	+0.036
10	1976.0	−0.174	−0.035
11	1977.0	−0.106	−0.175
12	1978.0	+0.009	−0.274

表 3(b) 各年年首的移动角

矢量	角度	移 动 角	V	V^2
0—3	56.8			
1—4	112.9	56.1	1.8	3.2
2—5	169.0	56.1	1.8	3.2
3—6	215.2	46.2	8.1	65.6
4—7	274.1	58.9	4.6	21.2
5—8	330.5	56.4	2.1	4.4
6—9	15.0	44.5	9.8	96.0
7—10	80.0	65.5	11.2	125.4
8—11	131.2	51.2	3.1	9.6
9—12	185.0	53.8	0.5	0.2
		平均 54.30		$\sum$ 328.8

$$m = \sqrt{\frac{328.8}{9(9-1)}} = 2.1$$

54.°30，故可求得其相应的滞后天数 ΔT_c 的关系式为：

$$\frac{365.24}{360° - 54.°30} = \frac{\Delta T_c}{54.°30}$$

所以 ΔT_c = 64.88 天或 = 0.178 年，而张德勒周期为 1.178 年或 430.12 天。

按此法我们将上海、天津、北京、综合 BIH，IPMS 等资料进行推算，并求得其结果如表 4。

由表 4 数据中可看出：

表 4

名　　称	张德勒周期		移动角	平均角一转	ΔT_c	m
上　　海	1.175 年	428.97 天	53°48	6.73 年	63.73 天	4.7
北　　京	1.202	449.11	60.56	5.94	73.87	4.6
天　　津	1.187	433.39	56.61	6.36	68.15	1.8
武　　昌	1.178	430.12	54.30	6.68	64.88	2.1
综　　合	1.175	429.26	64.02	6.71	64.02	3.5
BIH	1.180	431.10	55.00	6.55	65.86	2.4
IPMS	1.187	433.14	56.60	6.40	68.14	3.3

（1）极的张德勒摆动使极的相同年份的极位置绕极一转的周期大约是七年小一些。

（2）由此法导出的张德勒平均周期为 1.175 年左右或 430 天左右。

本文所得数值与近年来国际上有关的文献所述数字很接近。根据 Proverblo 在三十年代分析资料中也可看出张德勒周期很少超过 1.200 年。

P. Melchior 曾指出，张德勒周期 τ 作为洛夫数 k 的函数关系按下列公式给出：

$$1-\frac{\tau_0}{\tau}=k\frac{\omega^2\cdot a/2g}{e-\omega^2\cdot a/2g}$$

其中：τ_0 = 欧拉周期 305 天

$e = 1/298.3 = 0.003352$

a = 6378245 米

$\omega = 2\pi/864005$

g = 9.8 毫秒$^{-2}$

$\therefore\quad \omega^2\cdot a/2g = 0.001721$

将上式展开成

$$k=\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)(e-\omega^2\cdot a/2g)\left(\frac{1}{\omega^2\cdot a/2g}\right)$$

此处 τ 采用以上计算武昌站张德勒周期 430 天代入上式即可得 $k = 0.275$，而 Melchior 一文中给出 $k = 0.32$。

参　考　文　献

[1] Eiko CHIBA, 緯度観測所彙報, 第 17 号, 昭和 53 年 3 月, 116—122。

[2] E. Proverbio, Analysis of the Chandler of polar coordinates calulated with Orlover's method, (1971)。

[3] P. Melchior, *Earth tides and polar motions*, **13**, (1972)。

ANALYSIS OF CHANDLER PERIOD FROM LATITUDE OBSERVATIONS IN THE OBSERVATORIES OF CHINA

Qian Yiming

(*Institute of Geodesy and Geophysic, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, we have analysed Chandler period, phase and amplitude from the latitude observations in China. On the basis of observational data during 1966—1978 at Wuchang Time Observatory, we have obtained that the Chandler period is 1.177 years or 430 days, while using the joint polar coordinates system in China, the period will be 1.175 years. From those periods, the Love number k is calculated to be 0.275.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

天文重力水准计算方案

方　俊

摘　　要

本文是 1958 年工作的继续。为了便于电子计算，文中建议将每条天文重力水准路线拆开，先将每个天文点的重力异常的影响计算出来，然后再将邻近的天文点合并。大量的重复计算以及重力点的坐标的经常换算可以避免，如此，可以大大地节省计算时间，也便于计算程序的编制。四条接合边的误差则可以在拼接之后，按特殊程序予以改正。

一、基本公式

天文重力水准的基本计算公式为：

$$\Delta_\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\int \Delta g\left[\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}-l\left(\frac{X-l}{r'^3}+\frac{X+l}{r^3}\right)\right]d\sigma \qquad (1)$$

式中 l 等于两个天文点间距离的一半，即下图中 AB 的一半；沿主轴 AB 方向的坐标；Δg 为积分面上任一点的重力异常；r 及 r' 为 P 点到 A 及 B 的距离，α 及 α' 为相应的方向。

这个公式只包括天文重力水准中有关重力影响的一部分；另一部分，即天文大地的相对垂线偏差则可以根据天文及大地测量的数据推算。

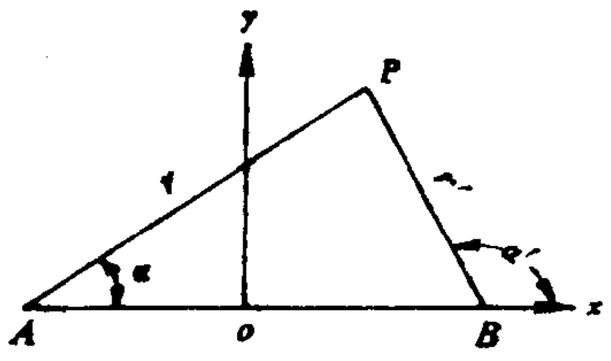


图　1

公式(1)实际包括两个坐标系统，即分别以 A 及 B 为原点的坐标系。在过去，一直都是采用双极坐标系统来解公式右边的积分式。例如，苏联莫洛金斯基所设计的椭圆-双曲线模板及作者于 1958 年所设计的方格模板，都是如此。

二、分部计算

但是，采用双极坐标系统，也就是说，将两个天文点联合起来计算，有很多不方便之处，特别是要做很多重复的量图和计算工作。我们知道，全国的一等天文-大地测量网是由很多的锁环组成的。天文重力水准就沿每个锁环四边的锁段进行。每个天文点的东、西、南、北都有锁段，都要进行天文重力水准计算，按照传统的方法，就必须在每个天文点上进行至少三次、四次甚至更多的量图和计算工作。这是浪费时间最多的一个因素。

我们不难从公式(1)看出，两个天文点间的高程异常差(重力部分) $\Delta\zeta$ 实际是由两部分组成的，即：

(a) 根据所规定的范围之内(半径 $= 2l$, $3l$ 或更大半径)的重力数据所推算的两点的高程异常 ζ_A 及 ζ_B 之差;

(b) 根据同一范围之内的重力数据推出两点的垂线偏差(在 AB 连线的方向上的) θ_A 及 θ_B, 取其平均,以距离 $2l$ 乘。因此,我们完全有理由将公式(1)拆开,根据两点周围的重力资料,分别计算,然后,再进行合并。这样考虑,优点很多。首先,前面所提到重复量图和计算工作可以避免。其次是不会由于天文点间距离的不同而采用不同的模板;或由电子计算机计算时,由于天文点距离的不同,而随时改变插点的系数。此外,还有一个很大的优点,就点可以直接应用重力测量资料中所采用的直角坐标系统,例如,分带的高斯坐标系统。当然,当天文点靠近分带边缘时,也必须进行换带计算。但是,究竟要比每两个天文点合并计算时的换带计算少得多。并且,由于重力点离天文点越远,其影响越小,换带计算,就无需十分严格。如果两个天文点不属于同一带,我们也要进行换带,但是目的只是要计算他们之间的距离和方向。距离准确至 10 米左右,方向准确至 1′ 即可。

但是,分开计算也有其缺点。这就是在边缘地区,一个天文点周围的计算范围不能与另一个天文点的完全相同。在某一方面,一个天文点的计算范围将比另一个天文点多一条边;而在相反的方向,则反过来。因此,影响不能互相抵消,由此将产生误差。但是,这种缺陷是完全可以克服的,我们在后文中将讨论之。

我们可以将全国的重力点,连同他们的平面坐标以及重力异常都储存在电子计算机之内。这些重力点的分布有稀有密。一般地说,在天文点周围,比较密集,离天文点远就逐渐稀疏。他们都是按 6° 分带的高斯投影坐标排列的。天文点也按相同的坐标系统储存在计算机内。在计算任意一个天文点上的重力高程异常和垂线偏差时,只要从储存中取出有关的重力异常(连同他们的坐标),根据所需要的插点坐标(与天文点的相对坐标),从取出的资料中内插出插点的重力异常,然后代入公式计算。当需要较远地区的数值时,要进行一些换带计算。但是,由于较远的重力点影响较小,所以,这种计算不必很严密。

在公式(1)中,我们可以看到,对于两个天文点,各有两项,即高程异常项和垂线偏差项。前者为:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_\sigma \frac{\Delta g}{r}\,d\sigma \tag{2}$$

式中 r 为(1)式中的 r 或 r',是积分点到天文点间的距离,此点上的重力异常为 Δg。公式(1)的前两项或公式(2)的积分是没有方向性的。所以不论天文重力水准路线的方向如何,都是一样的。但是公式(1)的后两项,即垂线偏差项则随着方向的不同而异。我们必须先计算出每个天文点上的基本垂线偏差分量(即南北及东西分量) ξ 及 η。他们的公式为:

$$\xi = -\frac{1}{2\pi\gamma}\int_\sigma \frac{\Delta g}{r^3}\,x\,d\sigma \quad 及 \quad \eta = -\frac{1}{2\pi\gamma}\int_\sigma \frac{\Delta g}{r^3}\,y\,d\sigma \tag{3}$$

然后,再根据与相邻天文点所组成的路线的方向,转换成此方向的垂线偏差。这里,我们采用直角坐标系统, x 及 y 轴分别在南北及东西方向,前者以向北为正,后者以向东为正。

假若天文重力水准路线 AB 的方向为 α, 而 A 及 B 两点上的垂线偏差分量为 ξ_A, η_A 及 ξ_B, η_B, 则在 AB 线方向上的垂线偏差分量为:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{2}\left[(\xi_A + \xi_B)\cos\alpha + (\eta_A + \eta_B)\sin\alpha\right] \tag{4}$$

在公式(2)及(3)中，假定在小的积分面积之内，Δg 为常数，而

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

x，y 为重力点相对于天文点坐标，又

$$d\sigma = d \times dy,$$

积分就所规定的面积内进行。积分可以用插点的数值积分方法，例如，高斯方法或其他类似的方法。这种方法应用于平原，应该不成问题。因为，在那里，重力异常的变化比较平缓，可以直接采用空间异常。即使在某些空间异常比较复杂的地区，必须要利用布格异常进行间接内插，也由于高度变化小，归算时也不致产生显著的误差。在山区，特别是大山区，情况就完全不同。在这种地区，我们必须采用间接内插。而地形的变化很剧烈，我们很难从地形图上，内插出准确的高度。例如，在秦岭地区，每公里间高程相差经常在 500 米乃至 1000 米，在地图上进行内插，误差往往可达 50 乃至 100 米。因此，归算时就可以产生 15—20 毫伽的误差。这是完全不允许的，特别是靠近天文点的内环更是如此。由此可以看出，应用插点的积分方法，不如采用小块面积上的平均异常为好。

现在，我们来考虑公式(2)及(3)的数值积分问题。我们假定图 2 中的方格 1234 中的平均重力异常 Δg 为常数，则高程异常项[公式(2)]的系数为：

$$I_\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dxdy}{r} \tag{5}$$

我们可以将它从积分号内提出。设此方块的系数为 I_ξ 及 I_η，则

$$I_\xi = -\frac{1}{2\pi\gamma}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{x}{r^3}dxdy$$

$$I_\eta = -\frac{1}{2\pi\gamma}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{y}{r^3}dxdy \tag{6}$$

我们这里的 x，y，r 等都以 l，即两天文点间的距离之半为单位。同样，公式(2)也是以 l 为单位。如此，在代入公式之后，只要以 l 乘全式，即可得所需的结果。我们可以根据国家天文-重力水准测量的一般情况来确定 l 的尺寸，例如，令 $2l = 100$ 公里，然后，在计算具体路线时，再以实际路线的距离与 l 的比例乘。

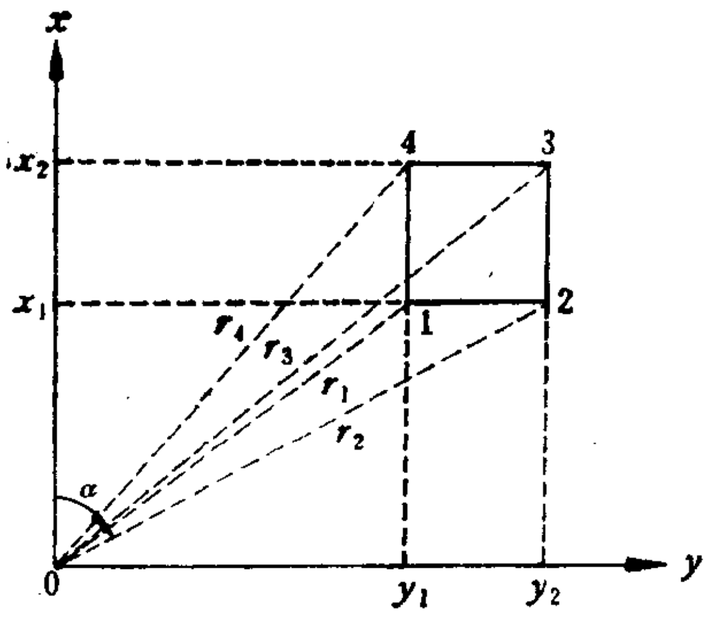


图　2

公式(6)的积分很简单。我们可有

$$\begin{aligned} I_\xi = \frac{1}{2\pi\gamma}\{&\ln(y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) \\ &- \ln(y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2}) \\ &+ \ln(y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \\ &- \ln(y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2})\} \end{aligned} \tag{7}$$

以及 η 式。如果令图 2 的 01，02，… 等距离为 r_1，r_2，…，则

$$I_\xi = \frac{1}{2\pi\gamma}\ln\frac{r_4 + y_2}{r_3 + y_1}\cdot\frac{r_1 + y_1}{r_2 + y_2} \tag{8a}$$

$$I_\eta = \frac{1}{2\pi\gamma}\ln\frac{r_4 + x_2}{r_3 + x_2}\cdot\frac{r_1 + x_1}{r_2 + x_1} \tag{8b}$$

现在，再考虑公式(5)的 I_ζ。先将直角坐标变换为极坐标，则因 $d\sigma = rdrd\alpha$，有

$$I_\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_\alpha^{\alpha'}\int_0^r d\alpha dr = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_\alpha^{\alpha'} rd\alpha \tag{9}$$

积分沿图 2 中方格 1234 的四条边进行。当积分沿着 $x =$ 常数的边进行时

$$r = x_i \sec\alpha_0$$

其中边 12，$i = 1$；边 43，$i = 2$。又若沿 $y =$ 常数进行时

$$r = y_i \csc\alpha$$

边 31，$i = 1$；边 24，$i = 2$。所以，(9)式为

$$I_\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[x_2\int_{\alpha_4}^{\alpha_3}\sec\alpha d\alpha + x_1\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sec\alpha d\alpha + y_2\int_{\alpha_3}^{\alpha_2}\csc\alpha d\alpha + y_1\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\csc\alpha d\alpha\right] \tag{10a}$$

α 的指标与 γ 的相同。前两个及后两个积分分别等于：

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \quad 及 \quad -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

代入 (10a)，可得：

$$I_\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma}\left[x_2\ln\frac{1+\sin\alpha_3}{1-\sin\alpha_3}\cdot\frac{1-\sin\alpha_4}{1+\sin\alpha_4} + x_1\ln\frac{1+\sin\alpha_1}{1-\sin\alpha_1}\cdot\frac{1-\sin\alpha_2}{1+\sin\alpha_2} - y_2\ln\frac{1+\cos\alpha_2}{1-\cos\alpha_2}\cdot\frac{1-\cos\alpha_3}{1+\cos\alpha_3} - y_1\ln\frac{1+\cos\alpha_4}{1-\cos\alpha_4}\cdot\frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1}\right] \tag{10b}$$

式中的各项都可以简化。例如，括弧中第一项可以写成：

$$\ln\frac{r_3^2(1+\sin\alpha_4)^2}{r_3^2\cos^2\alpha_3}\cdot\frac{r_4^2\cos^2\alpha_4}{r_4^2(1+\sin\alpha_4)^2}$$

而

$$r_4\cos\alpha_4 = r_3\cos\alpha_3,$$

故得：

$$\ln\frac{r_3^2(1+\sin\alpha_3)^2}{r_4^2(1+\sin\alpha_4)^2} = 2\ln\frac{r_3+y_2}{r_4+y_1}$$

由此可知，公式 (10b) 可以写成

$$I_\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[x_2\ln\frac{r_3+y_2}{r_4+y_1} - x_1\ln\frac{r_2+y_2}{r_1+y_1} + y_2\ln\frac{r_3+x_2}{r_2+x_1} - y_1\ln\frac{r_4+x_2}{r_1+x_1}\right] \tag{10c}$$

比较公式 (10c) 与公式 (8a)，(8b)，可以看出高程异常与垂线偏差公式所用的四个对数是相同的。I_ξ 就是 I_ζ 的前两个对数之差；I_η 则是后两个对数之差。

读者注意，公式 (10c) 可以从作者 1958 年的文中公式(15)直接推导出来[1]。

假设重力异常 Δg 以毫伽为单位，则以上各式的系数等于：

$$\frac{1}{2\pi\gamma} = 0.1624\times10^{-6}$$

又若将自然对数变为常用对数，并令距离单位 $l = 50$ 公里，则系数等于 (Δg 以毫伽为单

位）：

0.018697 米。

三、中央区的计算

在天文点周围的积分区域可按直角坐标划分为不同大小的方格。由于 I_ζ 及 I_ξ, I_η 都包含有 r 的倒数，当 $r \to 0$ 时，他们将趋向 ∞。所以，必须将接近天文点的地区划出另行计算。假定划出范围为 8 × 8 公里，即约为 $0.16l$。在这个中央方块之外，用方环向外扩展。如图 3 所示。此图给绘出整个方环系统的四分之一，即东北象限。如环带 I，有 8 个方格尺寸为 8×8 公里（假定 $l=50$ 公里），图中只表示方格 1 及 3 的一半和方格 2。每个方格的系数，即 I_ζ，I_ξ 及 I_η 值如表 1 所列（注意，方格 1 及 3 只列出半数）。将每个方格的系数与相应地区的平均重力异常相乘，即得这块地区的重力场对天文点所产生的高程异常和垂线偏差的影响。将方格 1，2，3 计算的结果相加，即得此环在东北象限的影响。将四个象限的 ζ 的结果相加，得整个环对高程异常的影响。以东北加西北象限的 ξ 减东南加西南的 ξ，得整个环对 ξ 的影响；同样，以东北加东南的 η，减西北加西南的 η，得此环对 η 的整个影响。此表共列了 11 个环，其排列如附图所示。各环以及方格的尺寸，以及系数 I_ζ，I_ξ，I_η 皆列于表 1。这里要提到的是环 IX 及 X 的中间方格都不是完全的正方

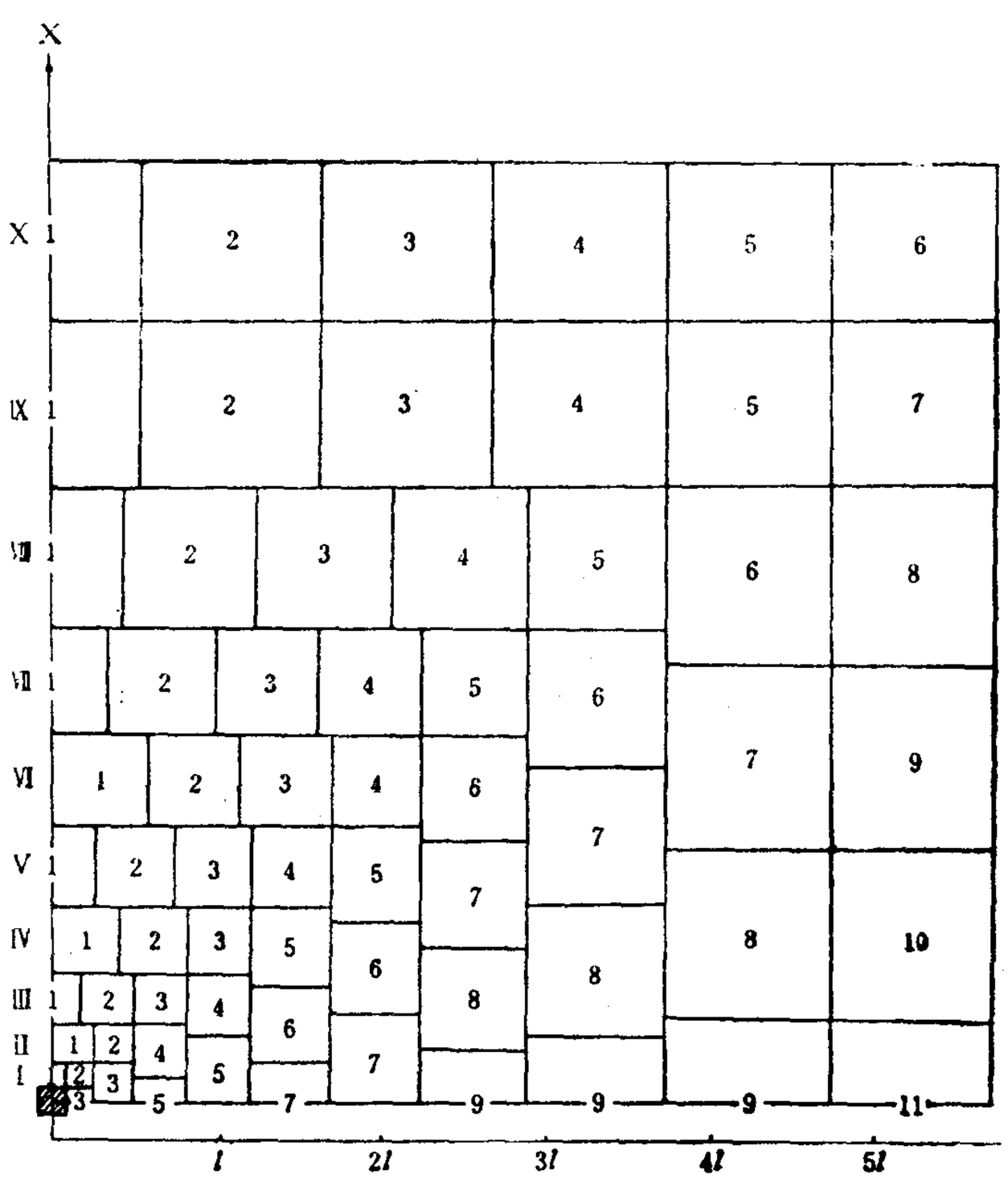


图　3

形。在远区域，这种偏离不会影响计算精度。

又表中所列是假定两个天文点间的距离 $2l = 100$ 公里计算的。我们必须以实际的

表 1

环 号	分格号	分格尺寸	I_ζ	I_ξ	I_η	备注
		公里 (l=50 公里)	毫米	毫米	毫米	
I	1	8×8	0.675	4.500	0.000	环边：x = 4—12 公里
	2	8×8	0.940	3.111	3.111	y = 4—12 公里
	3	8×8	0.675	0.000	4.500	
II	1	12×12	1.254	3.250	1.062	环边：x = 12—24 公里
	2		0.927	1.316	1.316	y = 12—24 公里
	3		1.254	1.062	3.250	
III	1	16×16	0.652	1.041	0.000	环边：x = 24—40 公里
	2		1.178	1.482	0.737	y = 24—40 公里
	3		0.913	1.030	1.030	
	4		1.178	0.737	1.482	
	5		0.652	0.000	1.041	
IV	1	20×20	1.281	1.249	0.249	环边：x = 40—60 公里
	2		1.120	0.831	0.499	y = 40—60 公里
	3		0.920	0.664	0.664	
	4		1.120	0.499	0.831	
	5		1.281	0.249	1.249	
V	1	24×24	0.653	0.457	0.000	环边：x = 60—84 公里
	2		1.237	0.780	0.260	y = 60—84 公里
	3		1.084	0.524	0.350	
	4		0.921	0.421	0.421	
	5		1.084	0.350	0.524	
	6		1.237	0.260	0.780	
	7		0.653	0.000	0.457	
VI	1	28×28	1.290	0.650	0.092	环边：x = 84—112 公里
	2		1.207	0.515	0.222	y = 84—112 公里
	3		1.060	0.360	0.257	
	4		0.919	0.300	0.300	
	5		1.060	0.257	0.360	
	6		1.207	0.222	0.515	
	7		1.290	0.092	0.650	
VII	1	32×32	0.650	0.255	0.000	环边：x = 112—144 公里
	2		1.263	0.467	0.116	y = 112—144 公里
	3		1.187	0.365	0.153	
	4		1.041	0.300	0.197	
	5		0.919	0.239	0.239	
	6		1.041	0.197	0.300	
	7		1.187	0.153	0.365	
	8		1.263	0.116	0.467	
	9		0.650	0.000	0.255	

续　表 1

环　号	分格号	分 格 尺 寸	I_ζ	I_ξ	I_η	备　　注
		公里 (l=50 公里)	毫 米	毫 米	毫 米	
VIII	1	41×41	0.836	0.255	0.000	环边：x = 144—185 公里
	2		1.614	0.468	0.117	y = 144—185 公里
	3		1.492	0.365	0.182	
	4		1.335	0.261	0.192	
	5		1.175	0.210	0.210	
	6		1.335	0.192	0.261	
	7		1.492	0.182	0.365	
	8		1.614	0.117	0.468	
	9		0.836	0.000	0.255	
IX	1	50×52	1.210	0.258	0.000	环边：x = 185—235 公里
	2		1.899	0.464	0.118	y = 185—235 公里
	3		1.824	0.348	0.175	
	4		1.631	0.247	0.188	
	5		1.359	0.200	0.200	
	6		1.631	0.188	0.247	
	7		1.824	0.175	0.348	
	8		1.899	0.118	0.464	
	9		1.210	0.000	0.258	
X	1	50×52	0.828	0.160	0.000	环边：x = 235—285 公里
	2		1.614	0.289	0.059	y = 235—285 公里
	3		1.530	0.249	0.088	
	4		1.383	0.200	0.096	
	5		1.290	0.148	0.100	
	6		1.080	0.108	0.108	
	7		1.290	0.100	0.148	
	8		1.383	0.096	0.200	
	9		1.530	0.088	0.249	
	10		1.614	0.059	0.289	
	11		0.828	0.000	0.160	
XI	1	50×52	0.694	0.112	0.000	环边：x = 285—335 公里
	2		1.332	0.211	0.036	y = 285—335 公里
	3		1.293	0.187	0.063	
	4		1.161	0.155	0.082	
	5		1.064	0.139	0.096	
	6		1.007	0.133	0.109	
	7		0.927	0.125	0.125	
	8		1.007	0.109	0.133	
	9		1.064	0.096	0.139	
	10		1.161	0.082	0.155	
	11		1.293	0.063	0.187	
	12		1.332	0.036	0.211	
	13		0.694	0.000	0.112	

天文点距离与100公里之比乘。但是,这种换算可以在最后,即将两个天文点合并之时进行。

中央区域应该用重力梯度计算。设在划出的中央地区中,重力异常等于

$$\Delta g = \Delta g_0 + \delta g_x \cdot x + \delta g_y \cdot y \tag{11}$$

式中 Δg_0 是中央点(天文点)的重力异常, δg_x 及 δg_y 是在 x 及 y 方向的重力水平梯度。代入公式(2)

$$\zeta_0 = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[\Delta g_0 \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} + \delta g_x \int_\sigma \frac{x}{r} d\sigma + \delta g_y \int_\sigma \frac{y}{r} d\sigma\right] \tag{12}$$

不难证明,后两项都等于0。因为中央方格是一个东西、南北都是互相对称的。所以只剩下第一项。它等于:

$$\zeta_0 = \frac{\Delta g_0}{2\pi\gamma} x \left[\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{\sqrt{x^2+y^2}-y}\right] \quad x = y = 4 \text{ 公里}$$

$$= 4.5804 \Delta g_0$$

式中 Δg_0 以毫伽为单位。

再将公式(12)代入(3)式的第一式,则

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[\Delta g_0 \int_\sigma \frac{x}{r^3} d\sigma + \delta g_x \int_\sigma \frac{x^2}{r^3} d\sigma + \delta g_y \int_\sigma \frac{xy}{r^3} d\sigma\right]$$

我们不难证明,在对称的中央方格中,第一及第三积分都等于0。所以

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \delta g_x \int_\sigma \frac{x^2}{r^3} d\sigma \tag{13a}$$

仍旧按照前文所提出的按方向积分的途径进行积分,则有

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[x_2 \int_{\alpha_4}^{\alpha_3} \cos\alpha d\alpha + x_1 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos\alpha d\alpha + y_2 \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} d\alpha + y_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} d\alpha\right] \tag{13b}$$

前两个积分都等于 $\sin\alpha$,后两个积分等于 $\left(\cos\alpha + \ln\tan\frac{\alpha}{2}\right)$。我们知道, $x_1 = y_1 = -x_2 = -y_2 = x$,而

$$\alpha_1 = 225°, \quad \alpha_2 = 135°, \quad \alpha_3 = 45°, \quad \alpha_4 = 315°$$

所以,前两个积分与后两个积分的第一项互相抵消。故得:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \cdot \delta g_x \cdot x_0 \cdot 4 \cdot \ln\tan 67.5$$

$$= 2.2902 \cdot \delta g_x \text{ 毫米} \tag{13c}$$

δg_x 以每公里1毫伽为单位。同理,可得:

$$\eta_0 = 2.2902 \cdot \delta g_y \tag{13d}$$

Δg_0 及 δg_x、δg_y 可以根据中央区域以内(必要时还可以包括一些附近的重力点)。按平差方法推求可以采用布格异常推算。除了 Δg_0 应该按照中央区域的平均高度进行换算成空间异常外, δg_x 及 δg_y 不必改算。

四、相邻天文点的合并及边区的改正

将任何一个天文点周围所有的方块上所计算出来的高程异常及垂线偏差，其中也包括中央区域的 ζ_0 及 ξ_0、η_0，都累加起来，得到这个天文点上的高程异常及垂线偏差，以字母上加横线代表之，即：

$$\bar{\zeta} = \Sigma\zeta_i$$

$$\text{及}\quad \bar{\xi} = \Sigma\xi_i,\quad \bar{\eta} = \Sigma\eta_i$$

i 代表各方块。

若天文点 A 的数值为 $\bar{\zeta}_A$，$\bar{\xi}_A$ 及 $\bar{\eta}_A$；相邻的天文点 B 的相当数值为 $\bar{\zeta}_B$，$\bar{\xi}_B$ 及 $\bar{\eta}_B$，则 A 与 B 之间的高程异常差等于

$$\Delta\zeta = \lambda[(\bar{\zeta}_A - \bar{\zeta}_B) - (\bar{\xi}_A + \bar{\xi}_B)\cos\alpha - (\bar{\eta}_A + \bar{\eta}_B)\sin\alpha] \qquad (14)$$

λ 为两天文点间的实际距离与 100 公里之比，α 则为 AB 线方向。

为了使全国的天文重力水准计算统一，而不致发生混乱起见，可以规定一个方向，例如，可以假定所有的路线都是从南到北或从东到西的。

在将两个天文点的计算结果合并之时，将因每个天文点的计算范围不完全相等而产生误差。这种情况，在合并计算方案中是不存在的。现在，我们将他们分开计算，而每个天文点周围都算到 nl，因此，两个天文点的计算范围是不能完全重合的。例如，A 及 B 各为东西两个天文点。则 A 点的计算范围，在东边要比 B 点的多一条宽度为 $2l$ 的边；在西边则相反。这个误差还是不能不考虑的。我们可以在将两个天文点合并之时，加入这种改正。如图 4 所示。如果天文点 A 及 B 都计算到 nl，则 A 点将多算一条边 aa'，而 B 点则少算一条边 bb'。所以，改正数应当是：

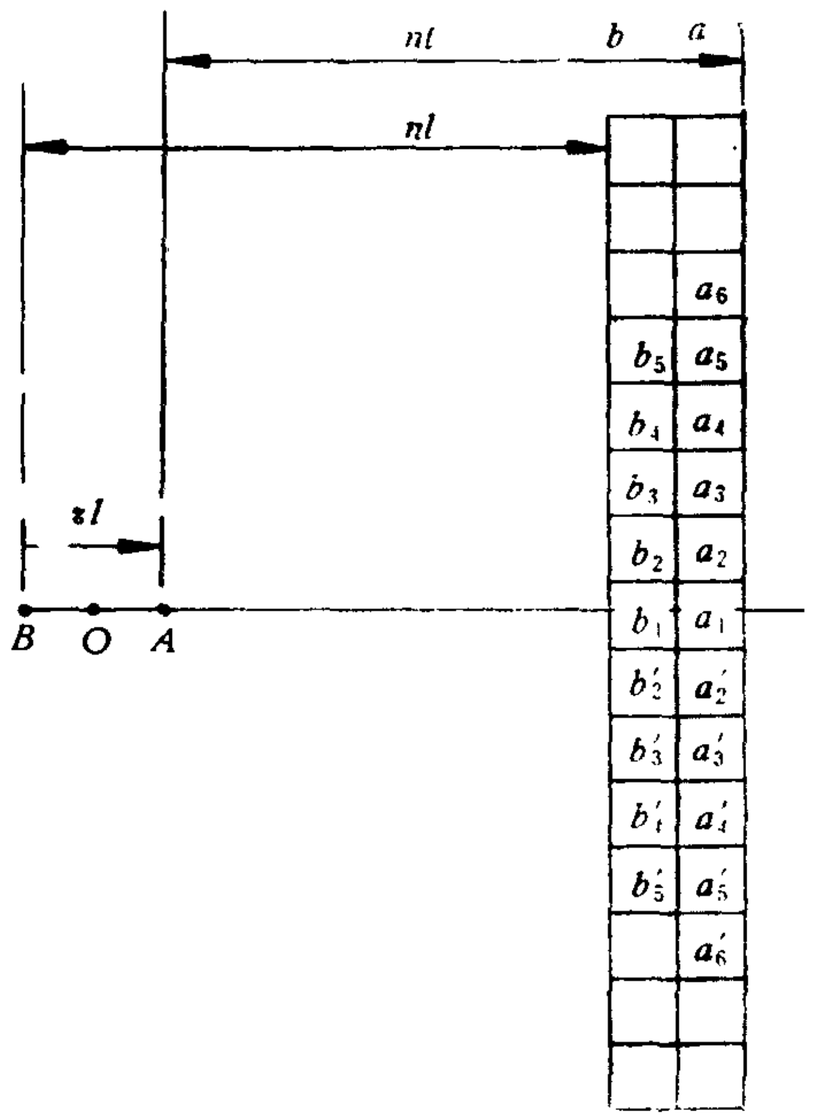


图　4

$$k_c = \sum[b_i(\Delta g_B)_i - a_i(\Delta g_A)_i] \qquad (15)$$

由于在边境上，两条带上的系数相差很小（参阅表 1 中的 l_ζ 值），我们可以采用其平均数，设为 $c_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$，则

$$k_c = \sum c_i \delta g_{BA}$$

δg_{BA} 是 b 带上的分格与 a 带相当格的重力异常差数。并且，从表 1 可以看出，在同一带上，各个分格的系数相差不多。同时，在相邻两带中，两个相当分格的平均重力异常之差（即相距 50 公里左右的重力异常差）的变化也不会很大。所以，我们完全可以以边境上平均重力异常差（50 公里间之差）乘边上的系数之和以推算改正值。例如，A，B 两个天文

点各计算到 XI 环 $\left(\text{大约等于 } 6\frac{1}{2}l\right)$。则 A 点多算了第 XI 环，B 点少算了第 X 环。第 X 环的系数总和等于 15.4；第 XI 环则等于 13.1。平均值为 14.2，设两带间的平均重力异常差为 20 毫伽，则改正值等于 284 毫米，即 0.284 米。我们可以采取这种简单的计算方法的原因是边境上各分格的系数变化很均匀之故。即使重力异常差变化较大，偏差也不致很大。当然，在个别地区，当差数变化很大之时，我们仍旧应该按分格计算。在每个天文点计算范围的四个边境上都应计算这种改正。对于东西(或南北)方向的天文重力水准路线，我们只需要计算东西(或南北)两边的改正值。取其代数和，加入计算结果。设东西的改正值之和为 k_E，南北的则为 k_N。若天文重力水准路线是倾斜的，它的方向等于 α，则改正值应该等于：

$$k = k_N \cos\alpha + k_E \sin\alpha \tag{16}$$

以上所讨论的只限于天文重力水准公式中的高程异常项。此外，还应该有垂线偏差项的影响。与前文所讨论不同之处是改正数不是相邻分格(属于不同带的相当分格)影响之差，而是其和。即公式(15)中的负号改为正号。但是，边境的一边与相对的一边，则是符号相反的。表 1 中第 X 及第 XI 带的系数均方根等于 0.391。如果东西(或南北)边境的平均重力异常之差为 100 毫伽，则误差不过 0.04 米。完全可以勿略不计。

参 考 文 献

[1] Фан Цзюнь, Палетка для вычисления по астроном.-грав. нивелированию, *Scientia Sinica*, 7, 12, (1958).

[2] Молоденский, М. С., Определение фигуры геоида при совместном исследовании астроном.-геод, уклонения отвеса и карта аномалии силы тяжести, *Тр. ЦНИИГАиК*, 17, (1937).

[3] 方 俊：天文-重力水准的模板计算，测量制图学报，2 卷，3，4 期，(1958)，科学出版社。

COMPUTATION OF THE ASTRO-GRAVIMETRIC LEVELINGS

Fang Tsün

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

This is the continuation of the work published in the Scientia Sinica, 1958. It is proposed to separate the astro-gravimetric leveling route into two parts, and calculate the effects of the gravity-anomalies around each astrometric point separately, and then make the combinations with the adjecent ones. The repeatedly using of the gravity materials and the constantly transformations of their coordinates are avoided, thus, greatly saving the computational time and facilitating the programming for the computers. Special treatment is made for the marginal errors after the combination.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

关于 1°×1° 平均重力异常的计算

许厚泽　高志忠　许尤楠　杨怀冰　王纲义　蒋福珍

摘　　要

本文演证和推导了八种推算 1°×1° 方块平均重力异常的方法，并且推导了八种方法的误差估计公式。选取九个不同地形类别的 1°×1° 方块，同时用八种方法进行了试算。计算结果表明，目前采用平差拟合法和直线内插法比较合适，它既考虑了测点的平面分布也考虑了测点的高程分布。最小二乘推估虽然在理论上是严密的，但所用协方差参数还有待进一步研究。不考虑点分布的取均方法不适用于点分布不均匀地区。

众所周知，重力观测值是一些地面上离散的点值，而在实际问题中，诸如用重力异常确定卫星轨道的摄动、用重力异常推算垂线偏差等等，往往需要的是重力异常沿全球表面的积分。这样对我们来说，更重要的是要知道许多局部地区直至全球的分块（如 1°×1°，5° × 5°）平均重力异常，而不是孤立的重力点值。

关于在局部重力场中内插的方法已做过大量的研究。实践证明，用简单的取测点空间异常均值的方法，精度低，特别是对于测点分布不均匀、地形变化复杂的地区，这种方法更不适用。

为了使 1° × 1° 均值满足所要求的精度且又节约计算工作量，可根据重力点的分布情况选择相应的计算方案。目前 1° × 1° 方块内重力点分布有如下几种情况：

（1）分布较均匀，且测点密度较大；

（2）分布不均匀，且密度较稀疏；

（3）仅测有少量的重力点；

（4）完全没有重力点。

第一种情况一般在起伏不大的较平坦地区，后三种情况一般为地形变化复杂的丘陵或山区，当然在海洋上也是缺少重力资料的。因此在考虑 1° × 1° 平均异常的计算时，要着重解决如下问题：

（1）空间异常和高程的相关问题，亦即如何利用地形资料来帮助我们提高计算平均空间异常的精度问题；

（2）重力点分布不均匀问题，这时如何利用重力异常的统计分析特性，从观测的重力点推估未测点的重力异常问题；

（3）空白地区的推估问题，换言之，如何利用其它观测资料来解决完全空白区的问题。

这里只叙述有点区的计算方法，空白区的推估计算另文叙述。

一、不考虑重力点分布的取均方法

这种方法适用于重力点比较均匀分布的地区，它考虑了重力异常与高程的相关性。我们知道，空间异常的变化是由于地表面附近的扰动物质引起的，这种局部扰动物质的影响(如层间改正、均衡改正等)主要呈现出对于高程的线性关系，因此可用下面的线性模型来描述空间异常

$$\Delta g_i = a + bh_i + \Delta_i \tag{1}$$

式中 Δg_i 和 h_i 为观测点的空间异常值和高程，对(1)取面积平均，所欲求的 $1^\circ \times 1^\circ$ 空间异常均值的期望为

$$\Delta\bar{\bar{g}} = a + b\bar{h} \tag{2}$$

a，b 为待定参数，从物理意义看，a 可视为广义的布格异常，b 为与局部密度有关的参数，$\bar{h}$ 为 $1^\circ \times 1^\circ$ 平均地形高。Δ 为余差，主要反映了模型的不完善，特别是局部地形的影响，此外它还包含了观测值的误差，但一般很小。在高程相差较大，测点分布均匀的情况下，可以认为它是独立的正态随机量 $N(0, \sigma^2)$，换言之，它的期望为 0，方差为 σ^2。

设 $\Delta\bar{\bar{g}}$ 的估值为 $\Delta\bar{g}$，则

$$\Delta g_i = \Delta\bar{g} - b\bar{h} + bh_i + v_i \tag{3}$$

v_i 为最或是误差。按最小二乘求解得 $1^\circ \times 1^\circ$ 平均空间异常的计算公式为

$$\Delta\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_i - b(h_i - \bar{h}))$$

$$= \Delta g_m - b(h_m - \bar{h}) \tag{4}$$

式中 Δg_m 和 h_m 为 $1^\circ \times 1^\circ$ 内测点的平均空间异常和平均高，$\bar{h}$ 为 $1^\circ \times 1^\circ$ 的地形平均高，n 为测点数。式中 b 值采用预选，即令 $b = 0.1116$ 和按线性回归方法求出区域的 b 值两种，称为方法 1(a) 和 1(b)。

方法 1(a)　把 $b = 0.1116$ 代入(4)式即得 $1^\circ \times 1^\circ$ 空间异常均值，它的方差为

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g'_i - \Delta g'_m)^2}{n(n-1)} + m_b^2(h_m - \bar{h})^2 + b^2m_h^2 \tag{5}$$

这里 $\Delta g'_i$ 和 $\Delta g'_m$ 为测点的布格异常及其平均值，m_b^2 为 b 的方差，m_h 为地形平均高的中误差。

方法 1(b)：由模型(1)按最小二乘法求解得

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_i - \Delta g_m)(h_i - h_m)}{\sum_{i=1}^{n}(h_i - h_m)^2} \tag{6}$$

$$a = \Delta g_m - bh_m \tag{7}$$

由(6)式求得的 b 值代入(4)式即得 $1^\circ \times 1^\circ$ 平均空间异常，它的估值精度为：

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = (1, \bar{h})W\begin{pmatrix}1\\ \bar{h}\end{pmatrix} + b^2m_h^2 \tag{8}$$

式中W为未知参数（a, b）的方差协方差阵,经过简单推导,(8)式变为

$$m_{\Delta\bar{g}}^2 = \frac{m_0^2}{n}\left(1 + \frac{(\bar{h} - h_m)^2}{\sigma_h'^2}\right) + b^2 m_{\bar{h}}^2 \tag{9}$$

式中

$$\sigma_h'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(h_i - h_m)^2}{n} \tag{10}$$

由(9)式可见，$\sigma_h'^2$ 值越大越好，换言之，测点的高差相差越大越有利。并且测点平均高h_m 与 1°×1° 地形平均高 $\bar{h}$ 越接近越好。

由线性回归理论还可求出重力异常与高程的相关系数 ρ:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_i - \Delta g_m)(h_i - h_m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_i - \Delta g_m)^2 \sum_{i=1}^{n}(h_i - h_m)^2}} \tag{11}$$

ρ 值最大为1,相关系数越接近于1,方法的效果越好,对每个 1° × 1° 方块,计算出 ρ 值后可根据观测数 n 及给定的显著性水平（$\alpha = 0.05$ 或 0.01）进行相关系数的显著性检验。只有相关系数很显著时,采用上述方法才是合理的。

在山区,一般 $\rho > 0.5$，有的地区达到 0.9 左右,在平原 $\rho < 0.5$，换言之，山区的相关性强于平原。因此在山区用这一方法能提高精度。

二、平差拟合法

上述方法完全没有考虑各观测点平面位置的分布情况,因此在求取方块平均异常时,某些局部地区的资料比较密集,并且往往是地形比较平坦的区域就得到过大的权,对于重力点分布不均匀的 1° × 1° 方块，这样做就更不适宜。因此除了考虑重力异常与高程的相关性外,还必须考虑重力点平面位置的分布情况。现将 1°×1° 方块分为36个 10′×10′ 的子块。

对子块内每个观测点组成如下观测方程

$$\Delta g_{ij} = a_i + b h_{ij} \tag{12}$$

式中 i 为子块标号，$i = 1, 2, \cdots, l$。j 为子块内观测点的标号，$j = 1, 2, \cdots, s_i$。Δg_{ij}、h_{ij} 分别为第 i 个子块内的第 j 个重力点的空间异常和高程值。(12)式中 b 值对 1° × 1° 约定是共同的,同样采用两种方法得到,即预选 b，或用最小二乘求解 b。

方法 2(a)　预选 b，令 $b = 0.1116$

根据观测点的空间异常值和 b 值,可以求得有实测重力值子块的平均布格异常值。

$$a_i = \Delta g_{s_i} - 0.1116 h_{s_i} \tag{13}$$

式中 Δg_{s_i}、h_{s_i} 为已知子块内空间异常平均值及测点高程平均值。

如果 1° × 1° 内 36 个子块都有实测重力值,则 1° × 1° 平均空间异常即为:

$$\Delta\bar{g} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} a_i + 0.1116\bar{h} \tag{14}$$

它的方差为:

$$m_{\Delta\bar{g}}^2 = \left(\frac{E_q}{36}\right)^2 \sum_{i=1}^{36} \frac{1}{s_i} + (0.1116)^2 m_{\bar{h}}^2 + m_b^2 (h_{ms} - \bar{h})^2 。 \tag{15}$$

E_q 为子块的代表误差，h_{ms} 为各个子块点平均高 h_{si} 的平均值

$$E_q = 2k\sqrt{q} \tag{16}$$

$$h_{ms} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} h_{si} \tag{17}$$

q 为子块边长，此处为 $10' \times 10'$ 方块的边长，约为 18 公里。k 为代表误差的系数，此处用布格异常的 k。

如果只有部分子块有观测点，则对于没有实测重力值的子块用平差拟合法进行内插。平差拟合法的数学模型为

$$a_i = a + a_\varphi \Delta\varphi_i + a_\lambda \Delta\lambda_i \tag{18}$$

a, a_φ, a_λ 为三个待定参数

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi_i &= \varphi_i - \varphi_0 。 \\ \Delta\lambda_i &= \lambda_i - \lambda_0 。 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

φ_0, λ_0 为 $1^\circ \times 1^\circ$ 方块中心点的经纬度，φ_i, λ_i 为子块中心的经纬度。由(18)式组成法方程式，用矩阵表示:

$$NA = U \tag{20}$$

解(20)式得

$$A = N^{-1}U \tag{21}$$

令

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} n_{11}, & n_{12}, & n_{13} \\ n_{21}, & n_{22}, & n_{23} \\ n_{31}, & n_{32}, & n_{33} \end{bmatrix} \tag{22}$$

则

$$A = \begin{bmatrix} a \\ \alpha_\varphi \\ a_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}, & n_{12}, & n_{13} \\ a_{21}, & n_{22}, & n_{23} \\ n_{31}, & n_{32}, & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{l} a_i \\ \sum_{i=1}^{l} a_i \Delta\varphi_i \\ \sum_{i=1}^{l} a_i \Delta\lambda_i \end{bmatrix} \tag{23}$$

显然 N^{-1} 阵是对称的，$n_{ij} = n_{ji}$

$$\left.\begin{aligned} n_{11} &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{l} \Delta\varphi_i^2 \sum_{i=1}^{l} \Delta\lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{l} \Delta\varphi_i \Delta\lambda_i\right)^2\right), \\ n_{12} &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{l} \Delta\lambda_i \sum_{i=1}^{l} \Delta\varphi_i \Delta\lambda_i - \sum_{i=1}^{l} \Delta\varphi_i \sum_{i=1}^{l} \Delta\lambda_i^2\right), \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} n_{13} &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\Delta\lambda_i-\sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i^2\right)\\ n_{22} &= \frac{1}{\Delta}\left(l\sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i^2-\left(\sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i\right)^2\right)\\ n_{23} &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i-l\sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i\Delta\varphi_i\right)\\ n_{33} &= \frac{1}{\Delta}\left(l\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i^2-\left(\sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\right)^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中Δ为行列式之值

$$\Delta=\begin{vmatrix} l, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i\\ \sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i^2, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\Delta\lambda_i\\ \sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\varphi_i\Delta\lambda_i, & \sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i^2 \end{vmatrix} \tag{25}$$

用(23)式求得之参数 a, a_φ, a_λ 推求未知子块之布格异常。

$$a_p = a + a_\varphi\Delta\varphi_p + a_\lambda\Delta\lambda_p \tag{26}$$

$\Delta\varphi_p$, $\Delta\lambda_p$ 为未知子块中心与1° × 1°方块中心的经纬度之差。

1° × 1°平均空间异常为

$$\Delta\bar{g}=\frac{1}{n}\left[\left(ma+\sum_{p=1}^{m}\Delta\varphi_p a_\varphi+\sum_{p=1}^{m}\Delta\lambda_p a_\lambda\right)+\sum_{i=1}^{l}a_i\right]+0.1116\bar{h} \tag{27}$$

令

$$H=\left(\frac{m}{n},\ \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}\Delta\varphi_p,\ \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}\Delta\lambda_p\right) \tag{28}$$

式中 n 为总的子块数，m 为未知子块数，l 为已知子块数。

将(23)式代入(27)式，且为简化公式采用下列符号

$$\begin{aligned} F_i = {}& \frac{1}{n}+\frac{m}{n}(n_{11}+n_{12}\Delta\varphi_i+n_{13}\Delta\lambda_i)\\ &+\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}\Delta\varphi_p\right)(n_{21}+n_{22}\Delta\varphi_i+n_{23}\Delta\lambda_i)\\ &+\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}\Delta\lambda_p\right)(n_{31}+n_{32}\Delta\varphi_i+n_{33}\Delta\lambda_i) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta g_{Fs} &= \sum_{i=1}^{l}F_i\Delta g_{si}\\ h_{Fs} &= \sum_{i=1}^{l}F_i h_{si} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Δg_{si}, h_{si} 为各子块实测平均空间异常和平均高，(27)式变为

$$\Delta\bar{g} = \Delta g_{Fs} + b(\bar{h} - h_{Fs}) \tag{31}$$

它的估值方差为

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = HW_A H^T + E^2_q \sum_{i=1}^{l} \frac{F_i^2}{s_i} + m_b^2(\bar{h} - h_{Fs})^2 + b^2 m_h^2 \tag{32}$$

式中第一项为拟推未知子块之误差，W_A 为参数 $(a, a_\varphi, a_\lambda)$ 之方差协方差阵，H为系数阵，即(28)式。

$$W_A = m_0^2 N^{-1} \tag{33}$$

m_0^2 为单一观测方差，N^{-1} 即(22)式

$$m_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{l} V_i^2}{l - 3} \tag{34}$$

$$V_i = a_i - a - a_\varphi \Delta\varphi_i - a_\lambda \Delta\lambda_i \tag{35}$$

(32) 式第二项为已知子块平均布格异常的误差，S_i 为第 i 个已知子块内的测点数，E_q 为子块的布格异常代表误差。

方法 2(b) b 值用最小二乘法求解。

对每个观测点，可列出观测方程

$$AX = L + V \tag{36}$$

用最小二乘法求解得

$$X = N^{-1}U \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= A^T A \\ U &= A^T L \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$U = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}\Delta g_{ij} \\ \sum_{j=1}^{s_1} \Delta g_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s_l} \Delta g_{lj} \end{bmatrix} \tag{39}$$

逆阵 N^{-1} 为

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} P, & -Ph_{s_1}, & -Ph_{s_2}, & \cdots\cdots, & -Ph_{sl} \\ -Ph_{s_1}, & \frac{1}{s_1} + Ph_{s_1}^2, & Ph_{s_1}h_{s_2}, & \cdots\cdots, & Ph_{s_1}h_{sl} \\ -Ph_{s_2}, & ph_{s_1}h_{s_2}, & \frac{1}{s_2} + Ph_{s_1}^2, & \cdots\cdots, & Ph_{s_2}h_{sl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ -Ph_{sl}, & Ph_{s_1}h_{sl}, & Ph_{s_2}h_{sl}, & \cdots\cdots, & Ph_{sl}^2 + \frac{1}{s_1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

式中符号 P 为

$$P = 1\Big/\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{l} s_i h_{s_i}^2\right) \tag{41}$$

由(37),(39),(40)式得

$$b = P\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}\Delta g_{ij} - \sum_{i=1}^{l} s_i h_{s_i}\Delta g_{s_i}\right) \tag{42}$$

Δg_{s_i}, h_{s_i} 意义同前，$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}^2$ 和 $\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}\Delta g_{ij}$ 为整个 1° × 1° 方块内所有观测点高程平方之和及测点高程与空间异常乘积之和，于是

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{s_i}\sum_{j=1}^{s_i}(\Delta g_{ij} - b h_{ij}) \\ &= \Delta g_{s_i} - b h_{s_i} \end{aligned} \tag{43}$$

式中 b 用 (42) 式求得之 b 代入。对于未知子块用平差拟合法进行推值，这一部分计算同(18)—(26)。1° × 1° 平均空间异常为

$$\Delta\bar{g} = \Delta g_{Fs} + b(\bar{h} - h_{Fs}) \tag{44}$$

式中符号意义同前，它的估值方差为

$$m_{\Delta\bar{g}}^2 = HW_A H^T + GW_x G^T + b^2 m_{\bar{h}}^2 \tag{45}$$

式中第一项为拟推未知子块之误差，与 (32) 式中第一项一样。第二项为由已知子块推算参数 $(b, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_l)$ 的误差，W_x 为参数 $(b, a_1, \cdots\cdots, a_l)$ 的方差协方差阵

$$W_x = m_0^2 N^{-1} \tag{46}$$

m_0^2 为单一观测方差，N^{-1} 为(40)式所示

$$m_0^2 = \frac{V^T V}{s - (L+1)} \tag{47}$$

$$V^T V = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i}\Delta g_{ij}^2 - b\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}\Delta g_{ij} - \sum_{i=1}^{l} a_i s_i \Delta g_{s_i} \tag{48}$$

l 为已知子块数，s 为 1° × 1° 内测点总数。参数的系数阵为

$$G = (\bar{h}, F_1, F_2, \cdots\cdots, F_l)。 \tag{49}$$

F_i 由(29)式给出，如果 $l = 36$，即所有子块皆为已知，则 $F_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{36}$

(45)式的第三项意义同前。

三、直线内插法

此法实际上也是一种平差拟合法。设 1° × 1° 内重力点的空间异常用下列模型表示

$$\Delta g_i = c_1 + c_2(\bar{X} - x_i) + c_3(\bar{Y} - y_i) + c_4(\bar{H} - h_i) \tag{50}$$

式中 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 为 1° × 1° 的中心点坐标，设其为坐标原点，$\bar{H}$ 为 1° × 1° 方块的地形平均高。x_i, y_i, h_i 为重力点的平面坐标与高程。因此可列出如下误差方程式

$$V_i = c_1 + c_2(\bar{X} - x_i) + c_3(\bar{Y} - y_i) + c_4(\bar{H} - h_i) - \Delta g_i \tag{51}$$

令 $\Delta x_i = \bar{X} - x_i$，$\Delta y_i = \bar{Y} - y_i$，$\Delta h_i = \bar{H} - h_i$，按最小二乘法组成法方程式

$$Nc = U \tag{52}$$

解(52)式得

$$c = N^{-1}U \tag{53}$$

即

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & \Delta\bar{x}, & \Delta\bar{y}, & \Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{x}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{x}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{y}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{h}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{h}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{h}, & \Delta\bar{h}\Delta\bar{h} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\bar{g} \\ \Delta\bar{x}\Delta\bar{g} \\ \Delta\bar{y}\Delta\bar{g} \\ \Delta\bar{h}\Delta\bar{g} \end{bmatrix} \tag{54}$$

当解得待定系数 c_1, c_2, c_3, c_4 后，就可求得该方块内任意一点的空间异常值

$$\Delta g_{pj} = c_1 + c_2(\bar{X} - x_j) + c_3(\bar{Y} - y_j) + c_4(\bar{H} - h_j)。 \tag{55}$$

若在 1° × 1° 内均匀地内插很多点，则内插点的空间异常加起来取平均即得 1° × 1° 方块的平均空间异常

$$\Delta\bar{g} = c_1 + c_2(\bar{X} - \bar{x}) + c_3(\bar{Y} - \bar{y}) + c_4(\bar{H} - \bar{h}) \tag{56}$$

式中 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{h}$ 为所有内插点的平均平面坐标及平均高。内插点数视地形而别，如在平原取 6 个点，丘陵取 9 个点，山区或大山区取 16 个点，特大山区取 25 个点。

1° × 1° 推值的方差为

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} m^2_{\Delta g_{pj}}}{m^2} \tag{57}$$

m 为内插点个数，式中

$$m^2_{\Delta g_{pj}} = [1, \Delta x, \Delta y, \Delta h] W \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta h \end{bmatrix} + c_4^2(m_H^2 + m_h^2) \tag{58}$$

W 为待定参数 $c_k(k = 1, 2, 3, 4)$ 的方差协方差阵

$$W = \begin{bmatrix} 1, & \Delta\bar{x}, & \Delta\bar{y}, & \Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{x}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{x}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{y}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{y}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{h} \\ \Delta\bar{h}, & \Delta\bar{x}\Delta\bar{h}, & \Delta\bar{y}\Delta\bar{h}, & \Delta\bar{h}\Delta\bar{h} \end{bmatrix}^{-1} \frac{m_0^2}{n} \tag{59}$$

m_0 为单一观测的方差

$$m_0^2 = \frac{[VV]}{s - 4} \tag{60}$$

式中 V_i 由(51)式计算，s 为 1° × 1° 内所有重力点数。m_H^2 为 1° × 1° 地形平均高的方差，m_h^2 为内插点高程平均值的方差。

四、最小二乘推估（1）

此方法考虑了观测点的分布及其与位置的相关关系，利用已算出的方差协方差统计

参数来推估未知子块的布格异常，同样用 1° × 1° 地形平均高恢复。

由于我们选用的统计参数是按百万分之一图幅做的，因此在以下叙述中，所有布格异常值都应先减去该图幅的布格异常期望值，在最后的 1° × 1° 平均布格异常中再加回。

同样把 1° × 1° 方块分成 36 个 10′ × 10′ 子块。已知子块的广义布格异常为

$$a_i = \Delta g_{s_i} - bh_{s_i} \tag{61}$$

未知子块的 $a_p(p = 1, 2, \cdots, m)$ 按下式推估：

$$A_P = C_P^T C^{-1} A \tag{62}$$

A_P, A 分别为未施测子块(未知子块)及有观测子块(已知子块)的平均布格异常，已知的平均布格异常是带有噪声的，所以公式应变为

$$A_P = C_P^T \bar{C}^{-1} A \tag{63}$$

式中

$$\bar{c}^{-1} = (c + E)^{-1} \tag{64}$$

c 为已知子块异常的协方差阵，E 为其误差的协方差阵。由于各子块的平均异常的误差是不相关的，所以矩阵 E 可表为

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & & & \\ & e_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_{ll} \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$e_{ii} = \frac{E_q^2}{s_i} \tag{66}$$

E_q 为子块的代表误差。C_p 为未知子块与已知子块异常之间的协方差阵。

令

$$c'_{ii} = c_{ii} + e_{ii} \tag{67}$$

则(63)式可变为

$$\begin{bmatrix} a_{p_1} \\ a_{p_2} \\ \vdots \\ a_{p_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{p_1 1}, & c_{p_1 2}, & \cdots, & c_{p_1 l} \\ c_{p_2 1}, & c_{p_2 2}, & \cdots, & c_{p_2 l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p_m 1}, & c_{p_m 2}, & \cdots, & c_{p_m l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1l} \\ c_{21}, & c'_{22}, & \cdots, & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l1}, & c_{l2}, & \cdots, & c'_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} \tag{68}$$

式中 $a_j(j = 1, 2, \cdots, l)$ 为已知子块中的平均布格异常。a_{p_i} 为未知子块中的平均布格异常。c'_{ii} 为已知子块的平均布格异常方差及误差的方差之和。c_{ij} 为已知的 i 子块与 j 子块的平均布格异常的协方差。c_{p_i} 为未知的 p 子块和已知的 i 子块的平均布格异常的协方差。

c 值可根据实测重力点按统计方法求出，并表为距离 s_{ij} 的函数，通常一种简易的形式为

$$c(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_n s^n \tag{69}$$

或以相关函数形式表示

$$R(s) = \frac{c(s)}{c(0)} = 1 + r_1 s + r_2 s^2 + \cdots + r_n s^n \tag{70}$$

总参测绘局二大队于 1977 年根据我国各种地形类别所算得之 $c(s)$ 或 $R(s)$ 值是以

点值统计得出，而我们所需要的系子块的平均值，故需加以修正。设子块平均布格异常的方差为 c_q，则其协方差函数应为

$$c(s) = c_q \cdot R(s) \tag{71}$$

c_q 可由已知公式求出

$$c_q = c_0 - E_q^2 \tag{72}$$

E_q 为子块的代表误差，c_0 为重力点值的方差。令

$$\bar{C}^{-1} = \begin{bmatrix} c'_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1l} \\ c_{21}, & c'_{22}, & \cdots, & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l1}, & c_{l2}, & \cdots, & c'_{ll} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11}, & d_{12}, & \cdots, & d_{1l} \\ d_{21}, & d_{22}, & \cdots, & d_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{l1}, & d_{l2}, & \cdots, & d_{ll} \end{bmatrix} \tag{73}$$

于是未知子块的推值为

$$a_p = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} c_{pi} d_{ij} a_j \tag{74}$$

(61)式中 b 同样用预选 b 和求解 b 两种。

方法 4(a)　　预选 b，令 $b = 0.1116$

把 b 值代入(61)式中，然后由(74)式推求未知子块之布格异常 a_p，则 $1^\circ \times 1^\circ$ 的平均空间异常为

$$\Delta\bar{g} = \sum_{i=1}^{l} F_i a_i + 0.1116\bar{h} \tag{75}$$

式中

$$F_i = \left(1 + \sum_{P=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} c_{pi} d_{ij}\right)/n \tag{76}$$

$1^\circ \times 1^\circ$ 平均空间异常的方差

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{P=1}^{m}\sum_{Q=1}^{m}\sigma_{PQ} + \sum_{i=1}^{l}\frac{E_q^2}{s_i} + 2\sum_{i=1}^{l}\sum_{P=1}^{m}\beta_{pi}\right) + m_b^2(\bar{h} - h_m)^2 + b^2 m_{\bar{h}}^2。 \tag{77}$$

式中第一项为未知子块的误差，它的误差协方差阵为

$$W_{PQ} = \begin{bmatrix} c_0, & c_{p_1p_2}, & \cdots, & c_{p_1p_m} \\ c_{p_2p_1}, & c_0, & \cdots, & c_{p_2p_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p_mp_1}, & c_{p_mp_2}, & \cdots, & c_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{p_11}, & c_{p_12}, & \cdots, & c_{p_1l} \\ c_{p_21}, & c_{p_22}, & \cdots, & c_{p_2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p_m1}, & c_{p_m2}, & \cdots, & c_{p_ml} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} c'_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1l} \\ c_{21}, & c'_{22}, & \cdots, & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l1}, & c_{l2}, & \cdots, & c'_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{p_11}, & c_{p_21}, & \cdots, & c_{p_m1} \\ c_{p_12}, & c_{p_22}, & \cdots, & c_{p_m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p_1l}, & c_{p_2l}, & \cdots, & c_{p_ml} \end{bmatrix}。 \tag{78}$$

为简便计，把 W_{PQ} 写成

$$W_{PQ} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \cdots, & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \cdots, & \sigma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m1}, & \sigma_{m2}, & \cdots, & \sigma_{mm} \end{bmatrix}。 \tag{79}$$

(77)式的第二项为已知子块的误差，由于子块平均异常的误差间互不关联，因此已知子块的误差协方差阵为

$$W_i = \begin{bmatrix} \frac{E_q^2}{s_1} & & & \\ & \frac{E_q^2}{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{E_q^2}{s_l} \end{bmatrix} \tag{80}$$

E_q 意义同前，s_i 为各子块内的重力点数。

(77)式的第三项为已知子块与未知子块间的相关误差，其误差协方差阵为

$$W_{ip} = \begin{bmatrix} c_{p_1 1}, & c_{p_1 2}, & \cdots, & c_{p_1 l} \\ c_{p_2 1}, & c_{p_2 2}, & \cdots, & c_{p_2 l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p_m 1}, & c_{p_m 2}, & \cdots, & c_{p_m l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1l} \\ c_{21}, & c'_{22}, & \cdots, & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l1}, & c_{l2}, & \cdots, & c'_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E_q^2}{s_1} & & & \\ & \frac{E_q^2}{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{E_q^2}{s_l} \end{bmatrix} \tag{81}$$

为简便计，令

$$W_{ip} = \begin{bmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1l} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m1}, & \beta_{m2}, & \cdots, & \beta_{ml} \end{bmatrix} \tag{82}$$

根据计算，这一项很小，只影响到小数点后第二位，因此可以忽略。式中其它项意义同前。

方法 4(b)　　最小二乘求解 b。

与平差拟合法中一样，用(42)式求得之 b 值，代入(61)式求得已知子块之平均布格异常 a_i，然后由(74)式推求未知子块的布格异常 a_p，则 1° × 1° 平均空间异常为

$$\Delta\bar{g} = \sum_{i=1}^{l} F_i a_i + b\bar{h} \tag{83}$$

式中 F_i 为(76)式所示。

1° × 1° 平均空间异常的方差为

$$m^2_{\Delta\bar{g}} = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \sigma_{pq} + GW_x G^T + b^2 m_h^2 \tag{84}$$

式中第一项与(77)式中第一项相同，为未知子块的误差，只是(78)式的 c' 阵改为 c 阵。(84)式的第二项为由已知子块推求参数 $(b, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_l)$ 的误差，包括模型误差和观测误差，W_x 为参数的方差协方差阵。

$$W_x = m_0^2 N^{-1} \tag{85}$$

N^{-1} 即为(40)式所示，m_0^2 为单一观测方差，同(47)式。G 为参数 $(b, a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 的系数阵。

$$G = (\bar{h}, F_1, F_2, \cdots, F_l) \tag{86}$$

五、最小二乘法推估（2）

原理同方法 4(a)，令 $b = 0.1116$。此处把 1° × 1° 方块分为 144 个 5′ × 5′ 子块，对每个子块皆求平均布格异常，不分已知和未知。

推值时采用最小二乘推估，且所用重力点数不得少于 4。如子块内没有四个重力点，可扩大范围，甚至可扩大至该 1° × 1° 方块的外围，设用 n_1 个已知点按下式拟推子块中心之布格异常

$$a_p = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi} \Delta g_i' \tag{87}$$

$\Delta g_i'$ 为重力点的布格异常，α_{pi} 为

$$\alpha_{pi} = \sum_{i=1}^{n_1} C^{-1} C_{pi} \tag{88}$$

c 为已知点间的方差协方差阵，c_{pi} 为已知点对未知点的协方差阵。因统计参数采用的是异常与其期望值之差，因此在我们的计算中同样应采用差值，待求得最后结果时再加回。

令

$$\Delta \bar{g}_i^* = \Delta g_i' - \Delta \bar{g}'。 \tag{89}$$

$\Delta \bar{g}'$ 为一个百万分之一图幅内所有测点的布格异常期望值，此时推值为

$$a_p^* = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi} \Delta g_i^* \tag{90}$$

$$a_p = a_p^* + \Delta \bar{g}' \tag{91}$$

将(89)(90)二式代入(91)得

$$a_p = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi} \Delta g_i' + \left(1 - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi}\right) \Delta \bar{g}'$$

1° × 1° 的平均空间异常为

$$\Delta \bar{g} = \frac{1}{144} \sum_{P=1}^{144} a_p + 0.1116 \bar{h} \tag{92}$$

它的方差为

$$m_{\Delta \bar{g}}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{P=1}^{m} m_p^2 + 2 \sum_{P=1}^{n} \sum_{Q=1}^{n} \sigma_{pq}\right) + b^2 m_h^2 + m_b^2 (h_m - \bar{h})^2 \tag{93}$$

此处 n 为 144。式中第一项为推值方差，每一个子块按下式算一个

$$m_p^2 = c_0 - 2 \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi} c_{pi} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \alpha_{pi} \alpha_{pl} c_{il} \tag{94}$$

c_{pi}、c_{pl} 为已知与推算点间的协方差，c_{il} 为已知点间的协方差，n_1 为推求 p 点时所用的已知点数，(93)式中第二项为推算点间的误差协方差。

$$\sigma_{pq} = c_{pq} - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{pi} c_{qi} - \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_{ql} c_{pl} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_{pi} \alpha_{qi} c_{il} \tag{95}$$

P 为推算点，用 n_1 个已知点推算。q 为另一推算点，用 n_2 个已知点推算。

(93)式中其它各项意义同前。

六、海陆交接处的计算

整个 1° × 1° 内皆是陆地，可采用上述任一种方法。如果 1° × 1° 内皆是海洋部分，则方法原理与上述相同，只是 b 值不一样。令陆地上用 b_1 表示，海洋上用 b_2 表示

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{2}\frac{\gamma}{RD_m}D = 0.0418 \times 2.67 = 0.1116 \\ b_2 &= 2\pi G(2.67 - 1.027) = 0.06868 \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

如果 1° × 1° 内海陆兼有，则必须根据海陆类别分别采用各自的 b 值进行计算。

实际上，海洋及海陆交接处比较平缓，且目前没有精确的海深图，因此用不着如此计算，可直接用简单的取空间异常均值的方法或用逐级取均法。

七、试 算 结 果

为了分析比较上述方法，我们选取了不同地形类别的九个 1° × 1° 方块进行试算，结果列于表 1 中。

(1) 在重力点的高程分布和平面分布都比较均匀的地区，上述八种方法皆可以用，都能满足±3毫伽的精度。

(2) 不考虑重力点分布的取均方法，计算简单，但它不能反映真正的精度，因为只要测点数多，不管其分布如何，算出的均方误差就小。因此此法不适用于测点分布不均匀的地区。

(3) 平差拟合法和直线内插法既考虑了测点的平面分布又考虑了测点的高程分布。此两法适用于重力点稀少但分布不很均匀，以及地形起伏较大但测点平均高与地形平均高相差不大的地区。然而平差拟合法和直线内插法各有利弊。前者顾及了测点分布的均匀程度，即考虑了点分布的权，对于测点少但分布均匀，则估值精度高，而对于测点虽多但聚集在一个角落，估值精度就低。后者则没有考虑重力分布的权。因为直线内插法以重力点为基本单元，而平差拟合法则是以子块作为基本单元。前者也存在不足之处。当已知子块数小于 3 时，平差拟合法得不到解。当测点数等于已知子块数加 1 时，平差拟合法也得不到解。前者的不足之处对于后者则不存在。

(4) 最小二乘法推估在理论上是严密的，如果重力异常的协方差函数选择得好，用此法可得到令人满意的结果。目前如何统计协方差参数及如何选取协方差参数还有待进一步的研究。因此最小二乘推估法目前在实际应用中还存在不少问题。

(5) 从表中还可见，当测点平均高与地形平均高相差很大时，几种方法的计算结果互差很大，如表中第 6，8，9 行高差均在 300 米以上，结果互差就大。第 8 行最为突出，其测点平均高与地形平均高相差达 1033 米，且测点分布集中在一角，因此 1° × 1° 平均异常值互差竟达 30 毫伽。这种“先天不足”的情况难以用计算方法来弥补。

表 1

序号	地形类别	点数 块数	测点平均高与地形平均高之差	不考虑点分布的取均法			平差拟合法			直线内插法	最小二乘推估 (1)			最小二乘推估 (2)
				推值及误差 $b=0.1116$	推值及误差	推求 b	推值及误差 $b=0.1116$	推值及误差	推求 b	推值及误差 $b=0.1116$	推值及误差 $b=0.1116$	推值及误差	推求 b	推值及误差 $b=0.1116$
1		1154	4.21	−17.92	−17.87	0.1004	−18.25	−18.25	0.1406	−17.77	−18.22	−18.22	0.1405	−20.27
		36		±1.14	±1.03		±1.12	±1.42		±0.31	±1.19	±1.41		±0.65
2		296	−66.94	−11.47	−10.83	0.1223	−16.99	−16.43	0.1286	−13.90	−14.38	−13.55	0.1286	−16.50
		21		±1.37	±1.26		±1.94	±1.43		±0.93	±2.67	±2.54		±1.09
3		732	−155.02	24.05	20.20	0.0870	18.95	18.71	0.1095	19.56	16.78	16.50	0.1095	12.79
		31		±2.20	±0.94		±1.82	±1.13		±0.57	±2.82	±2.05		±1.13
4		325	−29.97	−10.89	−11.35	0.0965	−10.30	−10.33	0.1108	−9.99	−10.30	−10.33	0.1108	−12.58
		36		±1.27	±1.07		±1.19	±1.14		±0.09	±1.31	±1.14		±1.30
5		734	−52.57	18.54	17.52	0.0925	11.92	12.10	0.1163	13.62	12.21	12.37	0.1163	10.18
		35		±1.31	±0.96		±1.39	±1.18		±0.13	±1.57	±1.35		±1.01
6		323	−318.11	−1.03	0.18	0.1154	0.03	1.28	0.1152	−1.61	−0.78	0.55	0.1153	0.90
		34		±4.03	±1.32		±4.79	±1.33		±0.28	±4.14	±1.64		±4.94
7		235	−35.29	0.08	−0.15	0.1053	0.48	0.38	0.1095		−0.31	−0.41	0.1094	−2.80
		35		±2.12	±2.03		±1.44	±1.74			±1.57	±1.87		±4.28
8		106	−1032.83	−23.55	−8.68	0.1262	−37.89	−17.09	0.1336	−24.45	−26.72	−5.92	0.1336	−21.90
		17		±12.75	±2.98		±12.32	±4.53		±6.71	±13.04	±5.77		±6.87
9		267	−428.84	23.52	25.87	0.1173	19.93	22.13	0.1168	19.59	22.56	24.76	0.1168	19.90
		31		±5.38	±1.60		±5.33	±1.45		±0.69	±5.39	±1.74		±4.63

参 考 文 献

[1] 周江文：误差理论，重力异常的推估，测绘出版社，(1979)。
[2] Uotila, Computation of Mean Anomalies of 1°×1° Blocks, AD-704595 (1967).
[3] Uotila, Analysis of Correlation between Free-Air Anomalies and Elevations, AD-704594 (1967).

COMPUTATION OF THE MEAN GRAVITY ANOMALIES OF 1°×1° SQUARES

Xu Houze Gao Zhizhong Xu Younan Yang Huaibing
Wang Gangyi Jiang Fuzhen
(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, eight methods for calculating the mean gravity anomalies of 1° × 1° squares are examined and derived, and estimate formulae of errors are also deduced. The trial calculation is carried out by selecting nine 1° × 1° squares in different topographies and using eight methods simultaneously. The computational result shows that, the methods of adjustment fitting and linear interpolation adopted so far are comparatively appropriate. Because we have considered not only the distribution of surface of the measured points but also that of height. Though in terms of theory the least squares collocation is rigorous, but the parameters of covariance adopted remain to be further studied. The method of averaging without considering the point distribution is not applicable for the inhomogeneous area of the point distribution.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

应用均衡理论推求 1°×1° 的平均空间异常*

孟嘉春　张赤军　蒋福珍　高志忠　任富朝

摘　　要

本文主要论述应用地壳均衡理论推求平均空间异常的方法，演证适用于电算的近区地形-均衡改正的直角坐标基本公式与按爱黎-海斯干宁假说的实用公式，以及导出其误差估算公式。试算结果表明，在缺乏实测重力资料或完全空白的区域，用 1°×1° 范围内平均均衡异常 $\Delta\bar{g}_i = 0$ 来反算 1°×1° 平均空间异常 $\Delta\bar{g}_f$ 的方法是可取的。

在近代的地球形状及地球重力场研究中，经常利用均衡异常来推估重力异常值。对于缺乏实测重力资料乃至完全空白的区域，如果具有较大比例尺（例如 1/10 万或 1/20 万）的地形图，我们可以借助地形资料按地壳均衡理论推求其空间异常信息。

应用地壳均衡理论计算均衡异常，通常地形-均衡改正是用均质圆柱体公式和海福特的圆模板，借助于地形图以手算方式进行的。用这种方法计算，工作量大、速度慢，而且也不适于应用电子计算机进行计算。

本文试图论述应用地壳均衡理论推求平均空间异常的方法，讨论它适用于电算的近区地形-均衡改正的直角坐标基本公式和按爱黎-海斯干宁假说的实用公式，对精度估算以及试算结果作些初步分析。

一、用均衡理论反求空间异常的原理

重力的均衡归算是将地球依某种地壳均衡模型调整地壳，经过均衡归算后，使地球得到一个密度均匀的地壳模型。一般来说，经过均衡归算的重力异常比其他的要小，而且其变化比较均匀。因此，利用均衡异常进行内插，只要有较少的重力点网，就可以简便地推估出待求点的重力值；而且，即使在缺乏重力测量资料的海洋和未测量过的地区，也能使推估得到较高的精度；鉴于均衡异常顾及到位于海平面以下的异常质量，所以在均衡归算中，空间归算公式的系数 0.3086 就更为合理[1a]。

重力均衡归算的方法一般分三个步骤进行[4]：（1）先将海平面以上的地形物质移去，即按地形改正归算；(2)按均衡密度差或均衡深度加入均衡改正；(3)按空间归算使观测点归算到大地水准面上。实际上，这就是将大地水准面以外的物质按一定的规律转移到内

---

* 本文写于 1979 年 5 月。

部，使地壳达到均衡状态。这样，归算到大地水准面上的均衡异常 Δg_i 可以写为：

$$\Delta g_i = g - \gamma + \delta g_f + \delta g_m + \delta g_t + \delta g_i,$$

或

$$\Delta g_i = \Delta g_f + \delta g_m + \delta g_t + \delta g_i \tag{1}$$

式中 g 为重力观测值，γ 为正常重力值。对于一定大小的区域，则有：

$$\Delta \bar{g}_i = \Delta \bar{g}_f + \delta \bar{g}_m + \delta \bar{g}_t + \delta \bar{g}_i \tag{2}$$

式中 $\Delta \bar{g}_i$ 为平均均衡异常，$\Delta \bar{g}_f$ 为平均空间异常，$\delta \bar{g}_m$ 为中间岩层改正的平均值，$\overline{\delta g_t}$ 为局部地形改正的平均值，$\delta \bar{g}_i$ 为均衡改正的平均值。

如果已知某区域的平均均衡异常 Δg_i，则有

$$\Delta \bar{g}_f = \Delta \bar{g}_i - (\delta \bar{g}_m + \delta \bar{g}_t + \delta \bar{g}_i) \tag{3a}$$

对于缺乏实测重力资料或完全空白的区域，我们可以利用空白地区周围的实测重力资料求出其区域平均均衡异常，据此推估出空白地区的 $\Delta \bar{g}_i$，再按 (3a) 式推求 $\Delta \bar{g}_f$。

如果在较大的(例如 $1^\circ \times 1^\circ$ 或更大的)区域内，我们并不知道其 $\Delta \bar{g}_i$ 值，这时，欲使该区域满足均衡条件的话，可设其平均均衡异常将等于零[16]。故有

$$\Delta \bar{g}_f = -(\delta \bar{g}_m + \delta \bar{g}_t + \delta \bar{g}_i) \tag{3b}$$

公式 (3a) 和 (3b) 就是利用地壳均衡理论反求完全无实测重力资料地区平均空间异常信息的基本公式。实际上，公式 (3b) 右边括弧内各项就是地形-均衡改正。因此，如果在一定区域内的平均均衡异常等于零，则该区域的平均空间异常值就等于地形-均衡改正改变符号后的值。

二、地形-均衡改正的公式

地形-均衡改正一般按近区与远区两部分进行计算。现在我们推导近区地形-均衡改正的直角坐标公式。

如果在空间直角坐标系中，取任意一点 O 作为原点。若被吸引点的单位质点位于坐标原点，吸引点 $M(x, y, z)$ 的单元质量为 dm，则它们在整个空间产生一个牛顿引力场。这样，作用在计算点(即被吸引点)的力向量在 z 轴上的分力，即对重力方向的影响 δg 可以写为：

$$\delta g = f\delta \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{4}$$

式中 f 为引力常数，在 CGS 单位中，$f = 6.670 \times 10^{-8}$；这里将微元体的密度 δ 看作是地壳的平均密度，是一常数，$\delta = 2.67$ 克/厘米^3。

首先利用积分

$$\int \frac{z\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

将(4)式对 z 和 y 依次进行积分，并注意到 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则(4)式可以写成：

$$\delta g = -f\delta\left\{\int_{x_1}^{x_2}\ln(y+r)dx\right\}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}$$

按分部积分法，可以写出：

$$\int\ln(y+r)dx = x\ln(y+r) - \int\frac{x^2dx}{(y+r)r}$$

以及

$$\int\frac{x^2dx}{(y+r)r} = \int\frac{x^2(r-y)dx}{(r^2-y^2)r} = \int\frac{x^2dx}{x^2+z^2} - y\int\frac{x^2dx}{(x^2+z^2)r}$$

$$= \int dx - z^2\int\frac{dx}{x^2+z^2} - y\int\frac{dx}{r} + yz^2\int\frac{dx}{(x^2+z^2)r}$$

$$= x - z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z} - y\ln(x+r) + yz^2\int\frac{dx}{(x^2+z^2)r}$$

而对上式最后一项的积分，设 $u = r/x$，$u^2 - 1 = (y^2+z^2)x^{-2}$，则

$$yz^2\int\frac{dx}{(x^2+z^2)r} = -z\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy}$$

这样，因为 $x - z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z}$ 项在积分上下限代入后等于零，故(4)式写为[2]：

$$\delta g = -f\delta\left\{x\ln(y+r) + y\ln(x+r) + z\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy}\right\}\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \tag{5}$$

从(4)式的积分中，我们知道，对于函数 $f(x, y, z)$ 的三重积分，在其上下限代入后，三重积分有如下的规则存在：

(1) 在函数 $f(x, y, z)$ 的三重积分中，每一项表达式前的正负号可由

$$f(x, y, z)\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} = \sum_{i,j,k=1,2}(-1)^{i+j+k}f(x_i, y_j, z_k) \tag{6}$$

确定。若在任一表达式中 $i+j+k$ 为偶数，则在该项之前应为正号；反之，当 $i+j+k$ 为奇数时，则在该项之前为负号。

(2) 函数 $f(x, y, z)$ 的三重积分之每一项表达式，在积分上下限代入后，必有且仅有8个类似的表达式。因为在 $f(x, y, z)$ 三重积分的任意一项表达式中，总有坐标 x_i, y_j, $z_k(i, j, k = 1, 2)$ 中的任一 x, y, z 存在，而2个不同坐标 x_i, y_j, z_k 里每次取1个坐标的所有组合的种数是 C_2^1，所以，$f(x, y, z)$ 三重积分的每一表达式总有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 8$ 个类似的表达式。

因此，注意到上述三重积分的性质(1)和(2)，将积分上下限代入，公式(5)可以写成：

$$\begin{aligned}\delta g = -f\delta\{&x_2\ln(y_2+r_{222}) - x_1\ln(y_2+r_{122}) - x_2\ln(y_1+r_{212})\\ &+ x_1\ln(y_1+r_{112}) - x_2\ln(y_2+r_{221}) + x_1\ln(y_2+r_{121})\\ &+ x_2\ln(y_1+r_{211}) - x_1\ln(y_1+r_{111})\\ &+ y_2\ln(x_2+r_{222}) - y_2\ln(x_1+r_{122}) - y_1\ln(x_2+r_{212})\\ &+ y_1\ln(x_1+r_{112}) - y_2\ln(x_2+r_{221}) + y_2\ln(x_1+r_{121})\\ &+ y_1\ln(x_2+r_{211}) - y_1\ln(x_1+r_{111})\\ &+ z_2\operatorname{arc\,tg}D_{222} - z_1\operatorname{arc\,tg}D_{122} - z_2\operatorname{arc\,tg}D_{212}\end{aligned}$$

$$+ z_2\text{arc tg}\,D_{112} - z_1\text{arc tg}\,D_{221} + z_1\text{arc tg}\,D_{121}$$
$$+ z_1\text{arc tg}\,D_{211} - z_1\text{arc tg}\,D_{111}\} \tag{7}$$

式中

$$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2},\ D_{ijk} = \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j},\ (i, j, k = 1, 2) \tag{8}$$

因为这里三重积分的每一表达式在积分上下限代入后有 8 项，因此，公式(7)共有 24 项，其中含对数式的共 16 项，含反正切式的共 8 项。不论是在对数式或反正切式中，每一项内都有 r_{ijk} 出现。又因 r_{ijk} 是四棱柱体元素每个角隅点(共 8 个)至坐标原点的距离，故 r_{ijk} 在 $i, j, k = 1, 2$ 的情形下有 8 个组合。正因为 r_{ijk} 的 8 个值是各不相等的，因此(7)式任一项均无法减少。

为简化三重积分在上下限代入后的表达式，我们可以将(7)式改写为:

$$\delta g = -f\delta\{x_2\ln A_1 + x_1\ln A_2 + y_2\ln B_1 + y_1\ln B_2 + z_2\text{arc tg}\,C_1 + z_1\text{arc tg}\,C_2\}, \tag{9}$$

式中

$$A_1 = \frac{(y_2 + r_{222})(y_1 + r_{211})}{(y_2 + r_{221})(y_1 + r_{212})} \qquad A_2 = \frac{(y_2 + r_{121})(y_1 + r_{112})}{(y_2 + r_{122})(y_1 + r_{111})},$$
$$B_1 = \frac{(x_2 + r_{222})(x_1 + r_{121})}{(x_2 + r_{221})(x_1 + r_{122})} \qquad B_2 = \frac{(x_2 + r_{211})(x_1 + r_{112})}{(x_2 + r_{212})(x_1 + r_{111})}, \tag{10}$$
$$C_1 = \frac{\dfrac{D_{222} + D_{112}}{1 - D_{222}D_{112}} - \dfrac{D_{122} + D_{212}}{1 - D_{122}D_{212}}}{1 + \dfrac{D_{222} + D_{112}}{1 - D_{222}D_{112}} \cdot \dfrac{D_{122} + D_{212}}{1 - D_{122}D_{212}}} \qquad C_2 = \frac{\dfrac{D_{121} + D_{211}}{1 - D_{121}D_{211}} - \dfrac{D_{221} + D_{111}}{1 - D_{221}D_{111}}}{1 + \dfrac{D_{121} + D_{211}}{1 - D_{121}D_{211}} \cdot \dfrac{D_{221} + D_{111}}{1 - D_{221}D_{111}}}$$

这是一种以直四棱柱为模型的直角坐标公式。对于局部地形改正和均衡补偿改正来说，它都是适用的。因此，公式(9)以及(8)，(10)就是我们计算近区地形-均衡改正的基本公式。

三、地形-均衡改正的实用公式

从理论上说，前面导出的近区地形-均衡改正基本公式(7)或(9)是严密的，计算上也不存在任何困难。为了便于实际应用这些公式，现在讨论近区地形-均衡改正的实用公式、判别反正切的象限、奇异点的处理、地形-均衡的远区影响以及近区与远区边界的接边问题。

1. 近区地形-均衡改正的实用公式

如果我们将公式(5)中的积分下限 z_1 看作是计算点的高程，并以该点高程作为起算，这时有 $z_1 = 0$，$z_2 = H - H_0$，则由(9)式可以写出局部地形改正 δg_t 如下:

$$\delta g_t = -f\delta\{x_2\ln A_1 + x_1\ln A_2 + y_2\ln B_1 + y_1\ln B_2 + (H - H_0)\text{arc tg}\,C_1\} \tag{11}$$

式中 H_0 为计算点的高程，H 为流动点的高程。实际计算时，H_0 可以用中心子块的地形平均高，H 用流动子块的地形平均高。

显然，这样算得的局部地形改正永远是正值。因为，在 $x_i, y_i (i, j = 1, 2)$ 正负号确

定的情形下，当 $H > H_0$ 时由于它与 z 轴的正方向同向，因而，(7)式中 $z_k \mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 算得的引力为正。反之，当 $H < H_0$ 时，即 z_k 为负值时，由于 $\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 也具有负值，因此算出的引力仍是正值。由此可知，不管 $H - H_0$ 是取正值或是负值，在计算中我们不必对 $\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 作出正负号的判别，总能使得局部地形改正为正。

应该指出，这里只要 x, y, z, r 取同一单位，则 A, B, C 和 D 都是无名数。但是在计算 $x \ln A$, $y \ln B$, $z \mathrm{arc\,tg}\, C$ 等时必须注意单位。例如，若 x, y, z 以米为单位，将它们化为 CGS 单位时均应乘以 10^2。因此，δg_i 以毫伽为单位时，则应取 $f\delta = 17.8089 \times 10^{-3}$。

至于均衡改正，其公式与局部地形改正公式完全类同。这时，只要将公式(9)中的 δ、z_1 和 z_2 分别以 δ_i、$-(H_0 + T)$、$-(H_0 + T + 4.45H)$ 代替，则得均衡改正 δg_i 为：

$$\begin{aligned}\delta g_i = f\delta_i\{&x_2 \ln A_1 + x_1 \ln A_2 + y_2 \ln B_1 + y_1 \ln B_2 \\ &- (H_0 + T + 4.45H)\mathrm{arc\,tg}\, C_1 - (H_0 + T)\mathrm{arc\,tg}\, C_2\}\end{aligned} \tag{12}$$

这里均衡改正采用爱黎-海斯干宁的假说。式中 δ_i 为岩浆密度与地壳平均密度之差，且 $\delta_i = 2.67 - 3.27 = -0.60$ 克/厘米^3。这样，(12)式中的 $f\delta_i = -4.002 \times 10^{-3}$。$T$ 为均衡深度，根据爱黎-海斯干宁假说设 $T = 30$ 公里。而其他符号含义同前。还需指出，这里 z_1 和 z_2 取负号是由于均衡深度与 z 轴的正方向相反之故。

2. 判别反正切的象限

众所周知，反三角函数

$$\theta_{ijk} = \mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$$

是在 $-\infty < D_{ijk} < \infty$ 的定义域内有主值 $-\frac{\pi}{2} < \theta_{ijk} < \frac{\pi}{2}$。也就是说，在语言程序中反正切的标准函数只要 D_{ijk} 是机器所能表示的任意数时都有主值。因为流动点可以位于各个象限内，流动子块的四个角隅点，可以位于同一象限内，或者两两成对地处在 x（或 y）轴的两侧，抑或在计算点周围的四个象限内。这样，位于第二、三象限内的角隅点所对应的 $\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 需要用其主值即 $\pi \pm \theta_{ijk}$ 来表示。

在地形-均衡改正基本公式(9)，(7)中，我们知道

$$\mathrm{arc\,tg}\, C_1 = \mathrm{arc\,tg}\, D_{222} - \mathrm{arc\,tg}\, D_{122} - \mathrm{arc\,tg}\, D_{212} + \mathrm{arc\,tg}\, D_{112} \tag{13a}$$

或

$$\mathrm{arc\,tg}\, C_1 = \theta_{222} - \theta_{122} - \theta_{212} + \theta_{112} \tag{13b}$$

在 z_2 确定的情形下，$\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 的象限由流动点坐标 x_i, y_j 的正负号确定。这样，无论子块的诸角隅点位于那一象限，若将这些点对应的 $\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 用其主值 θ_{ijk} 或 $\pi \pm \theta_{ijk}$ 代入(13b)，则式中出现的 π 都将互相抵销，而且其值与直接用反正切主值代入的情形相同。由此可见，在计算 $\mathrm{arc\,tg}\, C_1$ 时不需要对每一个 $\mathrm{arc\,tg}\, D_{ijk}$ 对应的角度作出象限判别。同理，在 z_1 时求 $\mathrm{arc\,tg}\, C_2$ 也是这样。

3. 奇异点的处理

在一般情况下，计算点是在计算区域的方块中心。假若我们将中央区域(例如 5′ × 5′ 方块)分成 9 个或 25 个子块，这时子块(例如 1′×1′) 边界的坐标不会落在坐标轴上，即坐

标轴与原点不会与子块的边界相重合。若中央区域分成 16 个子块，则出现有些 (4 块)子块的边界的一边落在 x (或 y) 轴上，有些 (4 块)子块的边界同时处在 x、y 轴和坐标原点上。在这种情形下，因 x (或 y) 值或者 x、y 值同时都等于零，这就导致 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy}$ 不在定义域 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 内而出现奇异值。对此，我们可以采用如下两种办法解决之。(1)将计算点移到它的附近，即在 x、y 值上加上一常数；(2) 将 $\operatorname{arc\,tg} D_{ijk}$ 代以 $\operatorname{arc\,tg} D'_{ijk}$ 来计算。

现在讨论第二种方法。如前所述，设

$$\theta_{ijk}=\operatorname{arc\,tg} D_{ijk}$$

则

$$\operatorname{arc\,tg} D_{ijk}=\operatorname{arc\ ctg} D'_{ijk} \tag{14}$$

这里

$$D'_{ijk}=\frac{x_i y_j}{z_k r_{ijk}},\ (i,\ j,\ k=1,\ 2) \tag{15}$$

利用平面三角中反三角函数的下列关系：

$$\operatorname{arc\,tg} D'_{ijk}+\operatorname{arc\ ctg} D'_{ijk}=\frac{\pi}{2}$$

得：

$$\operatorname{arc\,tg} D_{ijk}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} D'_{ijk} \tag{16}$$

因此，可以将 (13a) 式改写为：

$$\operatorname{arc\,tg} C_1=-(\operatorname{arc\,tg} D'_{222}-\operatorname{arc\,tg} D'_{122}-\operatorname{arc\,tg} D'_{212}+\operatorname{arc\,tg} D'_{112})=-\operatorname{arc\,tg} C'_1 \tag{17a}$$

同理，有

$$\operatorname{arc\,tg} C_2=-\operatorname{arc\,tg} C'_2 \tag{17b}$$

显然，将(10)式 C_1, C_2 中的 D_{ijk} 替换为 D'_{ijk}，我们立刻求得 C'_1 和 C'_2。这样，利用公式 (17a) 和 (17b)，我们就可以消除在 $x=0$ (或 $y=0$) 及其附近时 $\operatorname{arc\,tg} D_{ijk}$ 出现奇异值的问题。

4. 地形-均衡的远区影响

在地形-均衡改正中，按照海福特的分带，重力点至半径等于 166.7 公里(1°29′58″)的区域为近区。在近区内，假定地面是平的。本文前述的公式就是近区的地形-均衡改正公式。从 1°29′58″ 至 π 范围内的区域，即海福特分带的 18-1 外环带称为远区。地形-均衡，的远区影响按海福特和波威以球面带导出的基本公式进行归算[1,3]。这里使用 P. Kärki L. Kivioja 和 W. A. Heiskanen 1961 年发表的“关于海福特分带 18-1，爱黎-海斯干宁假说，$T=30$ 公里的世界地形-均衡归算图”[5]。计算均衡异常时，要将图上所读的值加在重力观测值上。若图上读得的值是正的话，归算就增强重力异常，如果它是负值的话，则它就使重力异常减少。

5. 近区与远区边界的接边问题

前面已经讲到，近区地形-均衡改正按方模板计算至 1.5°，是方形边界，远区影响按

圆模板计算，是圆形边界，因此存在一个近区与远区边界的接边问题。为解决方模板与圆模板的接边问题，我们以位于离计算点 1.5°的圆周上的方形子块为边界采用锯齿形接边。假若以 5′ × 5′的子块作为计算单元，我们应使圆周外所多算的子块部分与圆内没算入的子块面积的引力可以相互抵销。根据这一原则，我们规定：(1)子块在圆周内的部分大于该子块面积的一半者加入近区地形-均衡改正，否则就不计算其影响；(2)使圆外多算的子块引力与圆内没算的尽量能够相互抵销。换而言之，若子块中心在圆周内的则计算该子块的引力，否则就予以略去。

对于近区 1.5° 的周界，由于经纬线弧长的不等，从计算点至周界的球面距离角 ψ 可以由地理坐标按下式计算：

$$\cos\psi = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda)$$

式中 λ, φ 为计算点的经纬度，λ', φ' 为流动点的经纬度。

四、地形-均衡改正的误差估算

现在我们讨论地形-均衡改正的误差问题，即推导出近区地形-均衡改正的误差估算公式，各误差源(坐标误差、地壳密度误差、补偿密度误差、地形误差和地壳均衡深度误差)值的规定以及地形-均衡改正误差与平均空间异常误差的估值。

根据地形-均衡改正的基本公式(5)，求 δg 对 x, y, z, δ 的全微分，得：

$$\begin{aligned} d\delta g = -f\delta\Bigg\{&\left[\ln(y+r) + \frac{x^2}{r(y+r)} + \frac{y}{r} + \frac{yz^2}{x^2y^2+z^2r^2}\frac{x^2-r^2}{r}\right]dx \\ &+ \left[\ln(x+r) + \frac{y^2}{r(x+r)} + \frac{x}{r} + \frac{xz^2}{x^2y^2+z^2r^2}\frac{y^2-r^2}{r}\right]dy \\ &+ \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy} + \frac{z}{r}\left(\frac{x}{y+r}+\frac{y}{x+r}\right) + \frac{xyz}{x^2y^2+z^2r^2}\frac{z^2+r^2}{r}\right]dz \\ &+ \frac{1}{\delta}\left[x\ln(y+r) + y\ln(x+r) + z\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy}\right]d\delta\Bigg\} \end{aligned} \tag{18}$$

设点的平面位置误差 $dx_i = dy_i (i, j = 1, 2)$，则(18)式可以写为：

$$\begin{aligned} d\delta g = -f\delta\Bigg\{&\left[\ln(y+r) + \ln(x+r) + \left(1+\frac{x+y}{r}\right)\left(\frac{x}{y+r}+\frac{y}{x+r}\right)\right. \\ &\left. + \frac{z^2(xy-r^2)}{x^2y^2+z^2r^2}\frac{(x+y)}{r}\right]dx \\ &+ \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy} + \frac{z}{r}\left(\frac{x}{y+r}+\frac{y}{x+r}\right) + \frac{xyz}{x^2y^2+z^2r^2}\frac{z^2+r^2}{r}\right]dz \\ &+ \frac{1}{\delta}\left[x\ln(y+r) + y\ln(x+r) + z\operatorname{arc\,tg}\frac{zr}{xy}\right]d\delta\Bigg\} \end{aligned} \tag{19}$$

在给出地形-均衡改正的中误差公式之前，先将积分的上下限 x_2, x_1, y_2, y_1, z_2, z_1 代入(19)，并设 $dx_1 = dx_2$，这时，根据前述的三重积分的性质(1)和(2)，可以写出 $d\delta$, dx, dz_2, dz_1 的系数项如下：

$$F_\delta = \frac{1}{\delta}\left[x_2\ln A_1 + x_1\ln A_2 + y_2\ln B_1 + y_1\ln B_2 + z_2\operatorname{arc\,tg} C_1 + z_1\operatorname{arc\,tg} C_2\right],$$

$$\begin{aligned}
F_x = {} & \ln A_1 + \ln A_2 + \ln B_1 + \ln B_2 \\
& + \left(1 + \frac{x_2 + y_2}{r_{222}}\right)\left(\frac{x_2}{y_2 + r_{222}} + \frac{y_2}{x_2 + r_{222}}\right) + \frac{z_2^2(x_2y_2 - r_{222}^2)}{x_2^2y_2^2 + z_2^2r_{222}^2}\,\frac{(x_2 + y_2)}{r_{222}} \\
& - \left(1 + \frac{x_1 + y_2}{r_{122}}\right)\left(\frac{x_1}{y_2 + r_{122}} + \frac{y_2}{x_1 + r_{122}}\right) - \frac{z_2^2(x_1y_2 - r_{122}^2)}{x_1^2y_2^2 + z_2^2r_{122}^2}\,\frac{(x_1 + y_2)}{r_{122}} \\
& - \left(1 + \frac{x_2 + y_1}{r_{212}}\right)\left(\frac{x_2}{y_1 + r_{212}} + \frac{y_1}{x_2 + r_{212}}\right) - \frac{z_2^2(x_2y_1 - r_{212}^2)}{x_2^2y_1^2 + z_2^2r_{212}^2}\,\frac{(x_2 + y_1)}{r_{212}} \\
& + \left(1 + \frac{x_1 + y_1}{r_{112}}\right)\left(\frac{x_1}{y_1 + r_{112}} + \frac{y_1}{x_1 + r_{112}}\right) + \frac{z_2^2(x_1y_1 - r_{112}^2)}{x_1^2y_1^2 + z_2^2r_{112}^2}\,\frac{(x_1 + y_1)}{r_{112}} \\
& - \left(1 + \frac{x_2 + y_2}{r_{221}}\right)\left(\frac{x_2}{y_2 + r_{221}} + \frac{y_2}{x_2 + r_{221}}\right) - \frac{z_1^2(x_2y_2 - r_{221}^2)}{x_2^2y_2^2 + z_1^2r_{221}^2}\,\frac{(x_2 + y_2)}{r_{221}} \\
& + \left(1 + \frac{x_1 + y_2}{r_{121}}\right)\left(\frac{x_1}{y_2 + r_{121}} + \frac{y_2}{x_1 + r_{121}}\right) + \frac{z_1^2(x_1y_2 - r_{121}^2)}{x_1^2y_2^2 + z_1^2r_{121}^2}\,\frac{(x_1 + y_2)}{r_{121}} \\
& + \left(1 + \frac{x_2 + y_1}{r_{211}}\right)\left(\frac{x_2}{y_1 + r_{211}} + \frac{y_1}{x_2 + r_{211}}\right) + \frac{z_1^2(x_2y_1 - r_{211}^2)}{x_2^2y_1^2 + z_1^2r_{211}^2}\,\frac{(x_2 + y_1)}{r_{211}} \\
& - \left(1 + \frac{x_1 + y_1}{r_{111}}\right)\left(\frac{x_1}{y_1 + r_{111}} + \frac{y_1}{x_1 + r_{111}}\right) - \frac{z_1^2(x_1y_1 - r_{111}^2)}{x_1^2y_1^2 + z_1^2r_{111}^2}\,\frac{(x_1 + y_1)}{r_{111}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{z_2} = {} & \operatorname{arc\,tg} C_1 + \frac{z_2}{r_{222}}\left(\frac{x_2}{y_2 + r_{222}} + \frac{y_2}{x_2 + r_{222}}\right) + \frac{x_2y_2z_2}{x_2^2y_2^2 + z_2^2r_{222}^2}\,\frac{z_2^2 + r_{222}^2}{r_{222}} \\
& - \frac{z_2}{r_{122}}\left(\frac{x_1}{y_2 + r_{122}} + \frac{y_2}{x_1 + r_{122}}\right) - \frac{x_1y_2z_2}{x_1^2y_2^2 + z_2^2r_{122}^2} - \frac{z_2^2 + r_{122}^2}{r_{122}} \\
& - \frac{z_2}{r_{212}}\left(\frac{x_2}{y_1 + r_{212}} + \frac{y_1}{x_2 + r_{212}}\right) - \frac{x_2y_1z_2}{x_2^2y_1^2 + z_2^2r_{212}^2} - \frac{z_2^2 + r_{212}^2}{r_{212}} \\
& + \frac{z_2}{r_{112}}\left(\frac{x_1}{y_1 + r_{112}} + \frac{y_1}{x_1 + r_{112}}\right) + \frac{x_1y_1z_2}{x_1^2y_1^2 + z_2^2r_{112}^2}\,\frac{z_2^2 + r_{112}^2}{r_{112}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{z_1} = {} & \operatorname{arc\,tg} C_2 - \frac{z_1}{r_{221}}\left(\frac{x_2}{y_2 + r_{221}} + \frac{y_2}{x_2 + r_{221}}\right) - \frac{x_2y_2z_1}{x_2^2y_2^2 + z_1^2r_{221}^2}\,\frac{z_1^2 + r_{221}^2}{r_{221}} \\
& + \frac{z_1}{r_{121}}\left(\frac{x_1}{y_2 + r_{121}} + \frac{y_2}{x_1 + r_{121}}\right) + \frac{x_1y_2z_1}{x_1^2y_2^2 + z_1^2r_{121}^2}\,\frac{z_1^2 + r_{121}^2}{r_{121}} \\
& + \frac{z_1}{r_{211}}\left(\frac{x_2}{y_1 + r_{211}} + \frac{y_1}{x_2 + r_{211}}\right) + \frac{x_2y_1z_1}{x_2^2y_1^2 + z_1^2r_{211}^2}\,\frac{z_1^2 + r_{211}^2}{r_{211}} \\
& - \frac{z_1}{r_{111}}\left(\frac{x_1}{y_1 + r_{111}} + \frac{y_1}{x_1 + r_{111}}\right) - \frac{x_1y_1z_1}{x_1^2y_1^2 + z_1^2r_{111}^2}\,\frac{z_1^2 + r_{111}^2}{r_{111}}
\end{aligned} \tag{20}$$

这里，F_δ, F_x, F_{z_2}, F_{z_1} 相应地是 δg 对独立变量 δ, x, z_2, z_1 的偏导数。对于计算区域的某子块来说，它们都是常数。

前已述及，局部地形改正公式(11)是在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = H - H_0$ 的条件下给出的。在这种情形下，根据(19)和(20)，我们得如下的近区局部地形改正误差估算公式：

$$m_{\delta g_t} = \pm f\delta\sqrt{[F_x^2]m_x^2 + [F_\delta^2]m_\delta^2 + [F_{z_2}^2]m_H^2} \tag{21}$$

式中 m_x 是点位中误差，m_δ 是地壳密度中误差，m_H 是点的高程中误差，或是子块的地

形平均高中误差。实际上，m_H 应该是计算点的高程中误差 m_{H_0} 和地形平均高的估读中误差 m_{H_i} 之平方和的平方根，即 $m_H = \pm\sqrt{m_{H_0}^2 + m_{H_i}^2}$。但因 m_{H_0} 较之 m_{H_i} 是很小的数，因此可以略去不计。

同理，根据均衡改正(12)式中 z 之规定，可以由(19)、(20)式写出近区均衡改正误差估算公式如下：

$$m_{\delta g_i} = \pm f\delta_i\sqrt{[F_x^2]m_x^2 + [F_{\delta_i}^2]m_{\delta_i}^2 + 4.45^2[F_{z_2}^2]m_H^2 + [(F_{z_2} + F_{z_1})^2]m_T^2} \qquad (22)$$

式中 m_{δ_i} 为补偿密度中误差，F_{δ_i} 可以将 F_δ 中的 δ 代以 δ_i 来求得；m_T 为均衡深度中误差，m_T 的系数项是 F_{z_2} 和 F_{z_1} 之和，这是因为均衡改正公式中的积分上下限 z_2，z_1 都包含有均衡深度 T 之故。

应该指出，在假定计算点的近区内各子块的 m_x，m_δ，m_{δ_i}，m_H，m_T 同一的情况下，地形-均衡改正误差公式(21)和(22)是近区域各子块误差对计算点的总影响。

对于一定大小的区域（例如 1° × 1°）来说，应用均衡理论推算的平均空间异常的中误差 $m_{\overline{\Delta g}_f}$，可以由公式(3b)得出：

$$m_{\Delta\bar{g}_f} = \pm\sqrt{\frac{[m_{\delta g_m}^2 + m_{\delta g_t}^2 + m_{\delta g_i}^2]}{n^2}} \qquad (23)$$

式中 $m_{\delta g_m}$ 为中间岩层改正中误差，$m_{\delta g_t}$、$m_{\delta g_i}$ 为前述的各计算点的局部地形改正中误差和均衡改正中误差，n 为该区域内的计算点数目，(21)—(23)式中的[ ]表示求总和。

大家知道，中间岩层改正 δg_m 为：

$$\delta g_m = -0.0418\delta H$$

式中 δ 为地壳平均密度，H 为地面点的高程。实际上，δ 应该是由构成中间层的岩石种类来决定的。由于不同地区的地质不同，δ 可以在 10% 的范围内变化[3]。因此，采用不同的 δ 值对中间岩层改正的影响甚大。这样，我们必须将公式 (23) 中的 $m_{\delta g_m}$ 用下列关系替换之：

$$m_{\delta g_m}^2 = \pm 0.0418^2(\delta^2 m_H^2 + H^2 m_\delta^2) \qquad (24)$$

式中 m_H 是计算点的高程中误差，m_δ 是地壳平均密度中误差。

这样，如果暂时不顾及地形-均衡远区影响的误差和系统误差的话，利用公式 (23) 和 (24)，(21)，(22)可以求得近区地形-均衡改正的中误差。而且，如果在给定区域内计算的点数愈多，例如每 5′ × 5′ (或 10′ × 10′) 取一点，则 1° × 1° 区域的平均空间异常值的中误差将会大大减小。

对于预先推估 $\Delta\bar{g}_i$ 而由 (3a) 式反算 $\Delta\bar{g}_f$ 的方法，当推得的空白地区平均均衡异常的中误差 $m_{\Delta\bar{g}_i}$ 可以忽略时，$m_{\Delta\bar{g}_f}$ 的计算与前面所述的公式完全相同。如果必须顾及 $m_{\Delta\bar{g}_i}$，这时，我们只要在(23)的根式内加上 $m_{\Delta\bar{g}_i}^2$ 项即可。显而易见，这可以由 (3a) 式得到证明。

现在讨论各种误差的估值。若设 $m_\delta = m_{\delta_i} = \pm 0.05$ 克/厘米^3，$m_H = \pm 10$ 米，$m_T = \pm 5$ 公里，而 m_x 较小暂且略去不计。以试算区域某 1° × 1° 方块为例，在这方块范围内计算点的高程在 1693.0—3396.0 米之间，则这些点的最大误差值分别为：$m_{\delta g_m} = \pm 7.18$ 毫伽，$m_{\delta g_t} = \pm 0.51$ 毫伽，$m_{\delta g_i} = \pm 4.58$ 毫伽；如果在 1° × 1° 范围内取 16 个计算点，则按(23)式可得某 1° × 1° 的平均空间异常中误差 $m_{\Delta\bar{g}_f} = \pm 1.57$ 毫伽。

五、试算结果的分析

为了便于与实测重力数据比较，我们选取重力点比较密集、地形起伏较大的某地区作为试算区域，按前面所述的方法与公式进行了试算。

在这个区域计算了 8 个 1° × 1° 方块的结果。在每个 1° × 1° 方块内按 15′ × 15′ 取一个计算点，对各点都以中央区域用点高程、其他区域用 5′ × 5′ 子块的地形平均高、按爱黎-海斯干宁假说和均衡深度 $T = 30$ 公里进行计算。对每一点计算了它的布格改正、局部地形改正、均衡改正以及均衡异常与反算的空间异常值。然后加入地形-均衡远区影响，并分别求出 1° × 1° 的平均均衡异常 $\Delta\bar{g}_i$ 和平均空间异常 $\Delta\bar{g}_f$ 值。

前面已经讲过，应用地壳均衡理论推求平均空间异常，可以采用预先推估待求区域的 $\Delta\bar{g}_i$ 值法和假设待求区域内 $\Delta\bar{g}_i = 0$ 法。本文是假定在 1° × 1° 范围内 $\Delta\bar{g}_i = 0$ 来推算 $\Delta\bar{g}_f$ 的。为了验证在 1° × 1° 范围内平均均衡异常是否等于零的问题，我们求出了试算区域的 1° × 1° 的平均均衡异常值（表 1）。从所得结果来看，在试算区域内平均均衡

表 1　1° × 1° 的平均均衡异常

−1.01	−3.86 2.00	−4.69 1.50	−3.61 2.01

异常不大，最大约 5 毫伽，而且其变化较均匀。但是，这里 1° × 1° 的平均均衡异常值没有严格满足所设的均衡条件，这可能是由于均衡理论欠妥、选用的均衡深度不恰当、所用的模板欠合理、计算点的数目不足、密度误差和地形平均高误差较大、以及在 1° × 1° 范围内均衡异常均值不能完全等于零所引起的。尽管如此，表 1 所列数值显示，在试算区域 1° × 1° 范围内 $\Delta\bar{g}_i$ 是较小的。

其次，从推算的 $\Delta\bar{g}_f$ 与实测结果（表 2）的比较中可知，它们的最大差约为 7 毫伽，中

表 2　1° × 1° 推算的 $\Delta\bar{g}_f$ 与实测结果之比较

实测结果	16.05	3.37	−22.91	−13.79
$\Delta\bar{g}_f$	14.3	8.4	−18.6	− 8.9
Δ	1.75	− 5.03	− 4.31	− 4.89
实测结果	30.78	−17.34	−26.98	−21.67
$\Delta\bar{g}_f$	32.1	−24.1	−19.7	−18.1
Δ	−1.32	6.76	− 7.28	− 3.57

误差为 ±5.22 毫伽。显然，对于缺乏实测重力资料或完全空白的区域，这是令人满意的结果。由此可见，在 1° × 1° 范围内使平均均衡异常等于零反算平均空间异常 $\Delta\bar{g}_f$ 的方法是可取的。

参　考　文　献

[1] Михайлов, А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, 2—е изд., (1939), а/ стр. 172, б/стр. 172.

[2] Сорокин, Л. В., Гравиметрия и гравиметрическая разведка, Гостоптехиздат, (1953), стр. 373.

[3] 方 俊：重力测量与地球形状学，上册，科学出版社，(1965)，第201页。
[4] Heiskanen, W. A. and Moritz, H., Physical Geodesy, pp. 137—138, Freeman, W. H. and Company, (1967).
[5] Kärki, P., Kivioja, L. and Heiskanen, W. A., Topographic-isostatic reduction maps for the world for the Hayford zones 18-1, Airy-Heiskanen system, $T=30$ km. Publigrations of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, No. 35, Helsinki, (1961).

CALCULATION OF MEAN FREE-AIR GRAVITY ANOMALIES OF 1°×1° SQUARES BY APPLYING THE ISOSTATIC THEORY

Meng Jiachun Zhang Chijun Jiang Fuzhen
Gao Zhizhong Ren Fuchao
(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, we discussed mainly a calculating method of the mean free-air gravity anomaly by applying the isostatic theory, elaborated a fundamental formula by rectangular coordinates which is applicable for the topographic-isostatic correction of nearby regions and a practicable formula according to the Airy-Heiskanen hypothesis, and derived its estimate formula of error. The computed results manifest that in default of observed gravity data or entirely blank areas, the method of using mean isostatic anomalies in 1° × 1° squares to do an inversion of the mean free-air gravity anomalies is desirable.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

潮汐观测中仪器记录格值观测序列的样条拟合

许厚泽　　朱灼文

摘　　要

在潮汐观测中，使用 Vondrak-Paquet 的最优平滑法内插出所需时刻的仪器记录格值。本文则选用样条函数作为基本模型，给出问题的解法。

最优平滑法是 Vondrak (1969)[3]提出，用来平滑观测资料的方法。它是在 Whittaker 和Robinson (1946) 方法的基础上发展起来的，以后 Paquet (1972)[2]又进行了改进并用在潮汐观测中，对仪器记录格值进行平滑并内插出所需时刻的格值。其基本思想是选取一个适当的参数 $1/\lambda$ 作为平滑因子，使

$$\Phi = R + \lambda^2 F \tag{1}$$

为最小，其中 R 为实测值和内插值的残差平方和，F 为表征拟合曲线平滑度的量，用三阶差分的平方和表示；并选取分段的三阶拉格朗日多项式作为基本的插值函数。

我们知道，近年来，样条函数作为一种新的插值(逼近)工具，在任何插值(逼近)领域中表现出一系列的优越性，是其他任何函数无法与之比拟的，如结构简单、便于计算、稳定，能将误差限制在局部、逼近阶高、收敛性好，等等。因此可以想象，若将这种样条函数作为拟合的基本模型，如公式(1)，把残差均方最小原则与曲率变化均匀性要求结合在一起，得到的结果(称为样条拟合)无疑会更能符合实在的物理本质。下面将讨论这个问题。

假定已知一组离散的点列 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 上的记录格值的测量值：

$$y(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \cdots n,$$

x_i 称为观测点。

在区间 $[x_1, x_n]$ 上作一有穷分划

$$\Delta:\ x_1 = \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-1} < \xi_m = x_n$$

于是 $[x_1, x_n]$ 上关于分划 Δ 的三次样条可以表示为[4]：

$$S(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i (x - \xi_1)^i + \sum_{j=2}^{m-1} a_{j+2} (x - \xi_j)_*^3 \tag{2}$$

其中

$$(x - \xi_j)_*^3 = \begin{cases} (x - \xi_j)^3, & x \geqslant \xi_j \\ 0, & x < \xi_j \end{cases},\ j = 2, 3, \cdots m - 1 \tag{3}$$

ξ_j 称为样条函数的节点。由于(2)式有 $m + 2$ 个待定系数 a_k，所以观测点数 n 应大于 $m + 2$。一般情况下观测点可取与节点重合，也可让其中的一些节点与观测点不符。节

点的选取视实际情况而定。我们可先将已知的观测数据序列点成散点图。若曲线变化较缓或观测点值很密，则在此处少放节点；对于曲线变化急剧的地方，可增设节点，以适应实际的变化。

由(2)，根据样条函数的性质有

$$S'(x) = a_1 + 2a_2(x-\xi_1) + 3a_3(x-\xi_1)^2 + 3\sum_{j=2}^{m-1} a_{j+2}(x-\xi_j)_+^2 \tag{4}$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-\xi_1) + 6\sum_{j=2}^{m-1} a_{j+2}(x-\xi_j)_+ \tag{5}$$

以及

$$S'''(\xi_j+0) - S'''(\xi_j-0) = 6a_{j+2},\ j = 2, 3, \cdots m-1 \tag{6}$$

换言之，一、二阶导数是连续的，而 $S'''(x)$ 则为阶梯函数，$6a_{j+2}$ 为样条在点 ξ_j 上的跃度。按照弹性力学的细梁理论，跃度 $6a_{j+2}$ 正是弹性样条在简支点 ξ_j 上所承受的剪切力。要使样条的挠曲率变化均匀，即样条曲线平滑，且仅需所有剪切力的模的平方和，从而 $\sum_{j=2}^{m-1} a_{j+2}^2$ 为最小。

于是，样条拟合问题可以归结为：采用一样条函数(2)来拟合一组测量值 $\{y_i\}$，使其残差平方和为最小，同时又要使样条曲线足够平滑，而使 $\sum_{j=2}^{m-1} a_{j+2}^2$ 为最小。

定义拟合度函数

$$\underset{1,1}{\Phi} = \underset{1,n}{W^T}\ \underset{n,n}{P}\ \underset{n,1}{W} + \underset{1,m+2}{A^T}\ \underset{m-2,m+2}{Q}\ \underset{m+2,1}{A}, \tag{7}$$

其中

$$\underset{m+2,1}{A} = [a_0, a_1, \cdots a_{m+1}]^T \tag{8}$$

为样条参数向量；W 为残差向量，它包括观测值的测量误差及样条模型的误差：

$$\underset{n,1}{W} = \underset{n,1}{Y} - \underset{n,m+2}{C}\ \underset{m+1,1}{A}, \tag{9}$$

而

$$Y = [y_1, y_2, \cdots\cdots y_n]^T \tag{10}$$

为观测值向量，

$$C = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots\cdots & 0 \\ 1, & (x_2-\xi_1), & (x_2-\xi_1)^2, & (x_2-\xi_1)^3, & (x_2-\xi_2)_+^3, & \cdots\cdots & (x_2-\xi_{m-1})_+^3 \\ 1, & (x_3-\xi_1), & (x_3-\xi_1)^2, & (x_3-\xi_1)^3, & (x_3-\xi_2)_+^3, & \cdots\cdots & (x_3-\xi_{m-1})_+^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & (x_n-\xi_1), & (x_n-\xi_1)^2, & (x_n-\xi_1)^3, & (x_n-\xi_2)_+^3, & \cdots\cdots & (x_n-\xi_{m-1})_+^3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

为系数阵。

公式(7)中，P 为测量值的权系数阵，是一个对角线阵：

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & p_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中元素 $p_i = m_0^2/m_i^2$，m_0 为单位权均方误差，m_i 为 $y_i = y(x_i)$ 的测量误差，一般在各次记录格值测定时可估算出来。Q 是样条光滑性权系数阵，也是一个对角线阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & q_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & q_{m-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

我们可以假定其中的元素 q_i 是相等的，即令 $q_i = \lambda^2$。

我们总是设W服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布。于是求观测序列的最佳样条拟合为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = 0 \tag{14}$$

由(7)式得

$$-C^TPY + C^TPCA + QA = 0$$

即

$$(C^TPC + Q)A = C^TPY \tag{15}$$

显然，只有 $m \leqslant n + 2$ 时，问题才可能有解。

解(15)便求得参数向量 A：

$$A = (C^TPC + Q)^{-1}C^TPY \tag{16}$$

将(16)代入(2)就得到观测序列的最佳样条拟合函数，代入(7)便得到拟合度。

关于 λ 的选择问题。由于 A^TQA 是表征样条函数的微分性质与观测序列客观属性的符合程度，而这部分与表示数据符合程度的 W^TPW 是矛盾的。如果过份强调光滑性，即 λ 取得过大，则样条函数偏离实际的测量值就大，当 λ 大到一定程度时，得到的 a_4，a_5，$\cdots a_{m+1}$ 接近于零。此时我们的样条拟合就成通常的三次多项式回归了。Paquet 的经验[2]表明，随着 λ^2 的增加，$\lambda^2 F$ 有一个或几个极小点，而最佳的拟合应是相应于最小的平稳的 λ 值[1]。这个做法在我们的样条拟合中同样可以选取。

参 考 文 献

[1] Melchior, P., The tides of the planet earth, Pergamon Press, (1978).

[2] Paquet, P. et Honorez, M., Lissage des observations par la methode de Whittaker-Robinson-Vondrak. *Institut D'Astronomie et de Geophysique, Universite Catholique de Louvain, Contr.*, No. 13, (1972).

[3] Vondrak, J., A contribution to the problem of smoothing observational data, *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, **20**, 6, (1969).

[4] 李岳生、黄友谦：数值逼近，人民教育出版社，(1978).

SPLINE-FIT ON THE OBSERVATION SERIES OF THE INSTRUMENT RECORDER SCALE IN THE EARTH TIDAL OBSERVATIONS

Xu Houze Zhu Zhuowen

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academic Sinica*)

Abstract

The best-smooth method by Vondrak-Paquet has been used to interpolate the instrument recorder scale at the time concerned in the observations of the earth tides. In this paper, we selected Spline function as a basic model and obtained a solution about that.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

关于 Venedikov 调和分析的一点注记

许厚泽　　毛慧琴

摘　　要

Venedikov 调和分析方法在组成各波群的理论值时，是按潮波的频率分群的，波群中包括有二阶和三阶引潮位的潮波，但是，对不同阶的引潮位，潮汐因子是不尽相同的。为此，提出在全日和半日波群中来自三阶位的分波之理论振幅应加以修订，即它们需分别乘以 $k_1 = 0.922$（重力），$k_2 = 1.170$（倾斜）。

为了分析潮汐观测数据，国际地潮中心（ICET）建议采用 Venedikov 调和分析法[1]，但在理论潮波振幅计算中取 386 个波的完整潮汐位展开，并据此编制了全套计算程序。

但是，必须指出，在组成观测方程时，即

$$M_i^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{p}\left[\xi_k \sum_{j=\alpha_k}^{\beta_k} C_j h_j \cos\varphi_j(T_i) + \eta_k \sum_{j=\alpha_k}^{\beta_k} C_j h_j \sin\varphi_j(T_i)\right],$$

$$N_i^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{p}\left[-\xi_k \sum_{j=\alpha_k}^{\beta_k} S_j h_j \sin\varphi_j(T_i) + \eta_k \sum_{j=\alpha_k}^{\beta_k} S_j h_j \cos\varphi_j(T_i)\right],$$

$$\tau = 1, 2, 3$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots$$

式中

$M_i^{(\tau)}$，$N_i^{(\tau)}$——经 Venedikov 滤波后的观测值；

h_j——各分潮波的理论振幅；

$\varphi_j(T_i)$——相应于儒略时刻 T_i 的潮波理论相位；

α_k，β_k——波群中所包含的分波编号的上下界；

$\xi_k = \delta_k \cos\phi_k$，$\eta_k = \delta_k \sin\phi_k$；

δ_k——波群 k 的潮汐因子；

ϕ_k——波群 k 的相位滞后。

我们必须组成各个波群的理论振幅和相位，但在 Venedikov 的推导中，上式的各潮波理论值之和 $\sum h_j \cos\phi_j$ 及 $\sum h_j \sin\phi_j$ 是以波群划分的，在同一个波群中并没有区分出那些是来自二阶位，那些是来自三阶位的分波，这样就在公式中，对不同阶的位之潮波均取同样的潮汐因子 δ_k。但是，从地球模型推算所知，二阶位的潮汐因子 δ_2 与三阶位的潮汐因子 δ_3 是不相同的。例如按照莫洛金斯基地球模型 I：

对于重力　$\delta_2 = 1.160$　$\delta_3 = 1.070$

对于倾斜　$\gamma_2 = 0.686$　$\gamma_3 = 0.802$

二者相差约 10%，由此可见，对每个波群取同样的潮汐因子 δ_k 在理论上是不严密的。

另一方面，在 386 个潮波中，最小的振幅系数为 5×10^{-5}，而三阶位的潮波中振幅系数较大的有 M_1 波群 {155,555} 波，值为 -660×10^{-5}，N_2 波群中 {245,555} 波为 -649×10^{-5}，若以 δ_2 代替 δ_3，则相当于在这二个潮波的振幅系数中分别引进了 -52×10^{-5} 和 51×10^{-5} 的误差，在主要波群 O_1 中{145,655}波的振幅系数为 -108×10^{-5}，也引进了 8×10^{-5} 的误差，这样的量级已完全超过了一些小波的振幅系数，从这个角度来看，似乎也不容忽视。

根据上述理由，我们认为：按上式组成各波群的理论振幅时，波群中所有来自三阶位的分潮波的理论振幅应乘上下面的系数进行修正：

对于重力 $k_1 = 1.07/1.16 = 0.922$

对于倾斜 $k_2 = 0.802/0.686 = 1.170$

当然，就全日波言，更严格的还要考虑液核近周日摆动的影响，但一般可以忽略。

现举例示之(表 1)：

表1 波 群 *O*

编 号	角 频 率	来 源	原 来 振 幅	应 有 振 幅	
				(重 力)	(倾 斜)
69	145.455	V_3	0.00012	0.00011	0.00014
73	145,645	V_3	0.00016	0.00015	0.00019
74	145,655	V_3	−0.00108	−0.00100	−0.00126
75	145,665	V_3	0.00014	0.00013	0.00016
82	147,455	V_3	−0.00021	−0.00019	−0.00025

此外，在推算各波群的观测振幅时，根据文献[1]，一般是采用各波群的潮汐因子乘以其理论振幅的办法，这时也必须考虑到上述关系。

参 考 文 献

[1] B. Ducarme, The computation procedures at the International center for Earth tides, *BIM*, 75, (1975).

[2] P. Melchior, The tides of the planet earth, Pergamon press, (1978).

NOTES ON THE METHOD OF VENEDIKOV'S HARMONIC ANALYSIS

Xu Houze Mao Huiqin

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academic Sinica*)

Abstract

In the method of Venedikov's harmonic analysis, various groups of tidal waves are classified according to frequencies of tidal constituents. But in a wave group are included the tidal constituents deduced by 2nd and 3rd order tidal potentials whose tidal amptitude factors are not the same. Thus theoretical amplitudes coming from the constituent of 3rd order potential in groups of diurnal and semidiurnal waves must be revised, i.e. they should be multiplied respectively by factors $K_1 = 0.922$ (for gravity) and $K_2 = 1.170$ (for tilt) on the Basis of the Molodensky model I.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

固体潮水平分量理论值的计算

毛 慧 琴

摘　　要

本文在杜德逊的“重力潮汐理论值的计算”[1]一文的基础上，制定了一组适合于电子计算机计算的固体潮水平分量理论值的计算公式，精度为±0.2 毫秒。

根据牛顿万有引力的定理，宇宙间任何物体都存在着相互的作用力。其作用力的大小和物体的质量成正比，与物体间的距离平方成反比。因此地球表面上每一点都受到其他天体的引力，由于除日、月以外所有天体离地球距离与其质量相比，前者大得多，所产生的引力极其微小。所以地面上各点所受到的主要是来自日、月的引力。月亮和太阳对地球的引力与地球在月地和日地系统内旋转所产生的惯性离心力的合力，形成对地球的引潮力。如果地球为一完全刚体，表面为海水所覆盖，则在引潮力的作用下，海水产生周期性的涨落。但是地球并不是一个完全的刚体，而是一个具有一定弹性性质的弹性粘性体。因此，在引潮力的作用下，地球的固体表面也就出现了类似于海水潮汐涨落的周期性变化。

日、月对地面一点的引潮力可分解为垂直方向和水平方向两个分力，即固体潮的垂直分量和水平分量。垂直分量引起地面点的重力产生周期性的变化；水平分量使地面产生倾斜。这两个分量分别可用重力仪和倾斜仪测定。

由重力潮汐观测资料作调和分析求出重力潮汐因子 δ 值。又可从倾斜仪观测得到的水平分量求得倾斜潮汐因子 γ 值。而 δ 和 γ 都是反映地球物理性质的参数——勒夫数的线性组合，即

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}K$$

$$\gamma = 1 + K - h$$

式中 K, h 为勒夫数。由此可见，确定了 δ 和 γ 值，就可求出勒夫数 h, K。因此，可从固体潮汐的变化来研究地球内部结构及其流变性质。

在固体潮台站工作以及观测资料的分析中，均需应用潮汐理论值。为此，在 1972 年所提出的重力潮汐理论值的基础上制定了适合于电子计算机计算的固体潮水平分量的理论值计算公式。

一、基 本 原 理

月亮对地面一点的引潮力位为：

$$V = fM\frac{1}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos Z) \tag{1}$$

式中 f 为牛顿引力常数：

$$f = 66.7 \times 10^{-9}\ (\text{厘米}^2 \cdot \text{克}^{-1} \cdot \text{秒}^{-2})$$

M——月亮的质量；r——地心到月心的距离；a——地面点的地心向径；$P_n(\cos Z)$——n 阶球函数。

引潮力的水平分量又可分解为二个互相垂直的分量。即与经圈相切的南北分量，以南为正；与纬圈相切的东西分量，以西为正。若 l，φ 为地面点的经纬度，则按潮汐的静力学理论，把地球视为刚体，引潮力的水平分量为：

南北分量

$$X = -\frac{\partial V}{a\partial\varphi}$$

东西分量

$$Y = -\frac{\partial V}{a\cos\varphi\partial l}$$

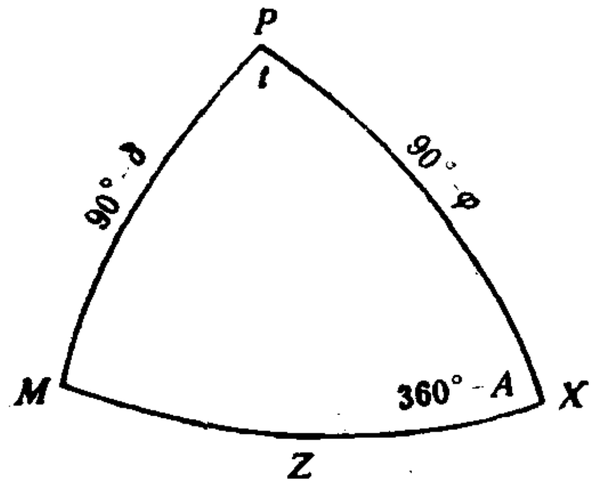


图 1

为了导出水平分量的表示式，先列出地面点与月亮相对位置之间的关系式。图 1 为一天文定位三角形。P 为北极，M 表示月亮，x 为地面点，A 为以北起算的月亮方位角，t 为时角，δ 是月亮的赤纬，Z 是月亮的天顶距。应用球面三角公式可导得下列的关系式：

$$\cos Z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \tag{2}$$

$$\sin Z\sin A = -\cos\delta\sin t \tag{3}$$

$$\sin Z\cos A = \sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos t \tag{4}$$

前面已经知道，南北分量和东西分量分别为引潮力位对纬度 φ 和对经度 l 的一阶导数。根据 1 微伽的精度要求，则球函数的阶 n 对月亮取 $n = 3$，对太阳取 $n = 2$。因此

$$-\frac{\partial V}{a\partial\varphi} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial V_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_3}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial\varphi}\right)$$

$$-\frac{\partial V}{a\cos\varphi\partial l} = -\frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial V_2}{\partial l} + \frac{\partial V_3}{\partial l} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial l}\right)$$

式中 V_{2s} 为太阳的二阶引潮力位。（以后凡属太阳的量都加上注脚 s）。对于月亮，由于

$$V_2 = \frac{3}{2}fM\frac{a^2}{r^3}\left(\cos^2 Z - \frac{1}{3}\right)$$

则

$$-\frac{\partial V_2}{a\partial\varphi} = -3fM\frac{a}{r^3}\cos Z\frac{\partial\cos Z}{\partial\varphi} \tag{5}$$

由(2)式

$$\frac{\partial\cos Z}{\partial\varphi} = \sin Z\cos A$$

并以地球赤道半径 $R = 6378.140$ 公里，

月地质量比 $\frac{M}{m} = \frac{1}{81.30}$，

月亮赤道视差 $\sin\pi = \sin 3422''.608 = 0.016592510$，

$fm = 398603$ 公里$^3\cdot$秒$^{-2}$，

一起代入(5)式得：

$$-\frac{\partial V_2}{a\partial\varphi} = -82.5828F(\varphi)\left(\frac{c}{r}\right)^3 \sin 2Z\cos A \tag{6}$$

而

$$F(\varphi) = \frac{a}{R} = 0.998327 + 0.001676\cos\varphi \tag{7}$$

同样

$$-\frac{\partial V_3}{a\partial\varphi} = -1.3702F(\varphi)^2\left(\frac{c}{r}\right)^4 \sin Z(5\cos^2 Z - 1)\cos A \tag{8}$$

对于太阳

$$-\frac{\partial V_{2s}}{a\partial\varphi} = -38.0302F(\varphi)\left(\frac{c_s}{r_s}\right)^3 \sin 2Z_s\cos A_s \tag{9}$$

所以南北分量的表示式为：

$$X = -\frac{\partial V}{a\partial\varphi} = -\left[82.5828F(\varphi)\left(\frac{c}{r}\right)^3 \sin 2Z + 1.3702F(\varphi)^2\left(\frac{c}{r}\right)^4 \sin Z(5\cos^2 Z - 1)\right]\cos A - 38.0302F(\varphi)\left(\frac{c_s}{r_s}\right)^3 \sin 2Z_s\cos A_s \tag{10}$$

由于

$$\frac{\partial\cos Z}{\partial l} = -\cos\varphi\cos\delta\sin t$$

$$= +\cos\varphi\sin Z\sin A$$

所以将(10)式中 $\cos A$ 改为 $\sin A$ 就得到东西分量的表示式

$$Y = -\frac{\partial V}{a\cos\varphi\partial l}$$

$$= -\left[82.5828F(\varphi)\left(\frac{c}{r}\right)^3 \sin 2Z + 1.3702F(\varphi)^2\left(\frac{c}{r}\right)^4 \sin Z(5\cos^2 Z - 1)\right]\sin A - 38.0302F(\varphi)\left(\frac{c_s}{r_s}\right)^3 \sin 2Z_s\sin A_s \tag{11}$$

二、固体潮水平分量理论值的计算

从上述公式可以看出，计算固体潮的水平分量，首先需要计算月亮和太阳的天顶距 Z 和方位角 A 以及日地和月地平均距离与瞬时距离之比 $\frac{c}{r}$ 和 $\frac{c_s}{r_s}$，如果按(2)、(3)、(4)式计算，式中月亮和太阳的赤道坐标从天文年历中查取，则不便于利用电子计算技术。若把 Z 和 A 化为黄道坐标的函数，利用布朗月理论再将月亮和太阳的黄道坐标 λ、β 与 λ_s、β_s 展为六个天文引数：

S——月亮平黄经；

N——月亮升交点经度；

P——太阳近地点经度；

h——太阳平黄经；

p_s——近日点经度；

ε——平黄赤交角。

的函数，利用电子计算机运算极为方便。其具体计算步骤如下：

(1) 对不同台站先由(7)式算出 $F(\varphi)$。

(2) 求出计算时刻的儒略世纪数

$$T = \frac{T_0 - 2415020 + (t-8)/24}{36525} \tag{12}$$

式中 T_0——计算日的儒略日，在天文年历中查得；t——计算时刻，为北京时区，需化为格林尼治时间，故取 $(t-8)$。t 以小时为单位。

(3) 计算六个天文引数

$$\left.\begin{aligned} S &= 270.^\circ43659 + 481267.^\circ89057T + 0.^\circ00198T^2 + 0.000002T^3 \\ h &= 279.^\circ69668 + 36000.^\circ76892T + 0.^\circ00030T^2 \\ p &= 334.^\circ32956 + 4069.^\circ03403T - 0.^\circ01032T^2 - 0.^\circ00001T^3 \\ N &= 259.^\circ18324 - 1934.^\circ14201T + 0.^\circ00208T^2 + 0.^\circ000002T^3 \\ p_s &= 281.^\circ22083 + 1.^\circ71902T + 0.^\circ00045T^2 + 0.000003T^3 \\ \varepsilon &= 23.^\circ45229 - 0.^\circ01301T - 0.^\circ000002T^2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(4) 求月亮的 $\frac{c}{r}$，$\cos Z$，$\cos A$，$\sin A$

$$\begin{aligned} \frac{c}{r} = 1 &+ 0.0545\cos(s-p) + 0.0030\cos 2(s-p) + 0.01\cos(s-2h+p) \\ &+ 0.0082\cos 2(s-h) + 0.0006\cos(2s-3h+p_s) \\ &+ 0.0009\cos(3s-2h-p) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \lambda = S &- 0.0032\sin(h-p_s) - 0.001\sin(2h-2p) \\ &+ 0.001\sin(s-3h+p+p_s) + 0.0222\sin(s-2h+p) \\ &+ 0.0007\sin(s-h-p+p_s) - 0.0006\sin(s-h) + 0.1098\sin(s-p) \\ &- 0.0005\sin(s+h-p-p_s) + 0.0008\sin(2s-3h+p_s) \\ &+ 0.0115\sin(2s-2h) + 0.0037\sin(2s-2p) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &- 0.0020\sin(2s-2N) + 0.0009\sin(3s-2h-p) \\ \beta = &- 0.0048\sin(p-N) - 0.0008\sin(2h-p-N) \\ &+ 0.003\sin(s-2h+N) + 0.0095\sin(s-N) \\ &+ 0.001\sin(2s-2h+p-N) + 0.0049\sin(2s-p-N) \\ &+ 0.0006\sin(3s-2h-N) \end{aligned} \tag{16}$$

然后，由下列各式把月亮的赤道坐标化为黄道坐标

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda\cos\beta + \cos\varepsilon\sin\beta \tag{17}$$

$$\cos\delta\cos t = \cos\beta\cos\lambda\cos\theta + \sin\theta(\cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\beta) \tag{18}$$

$$\cos\delta\sin t = \cos\beta\cos\lambda\sin\theta - \cos\theta(\cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\beta) \tag{19}$$

$$\theta = (t - 8) \times 15^\circ + h + l - 180^\circ \tag{20}$$

式中：

λ——月亮的黄经；　　β——月亮的黄纬；

δ——月亮的赤纬；　　t——月亮的时角；

θ——地方恒星时；　　l——台站的经度。

代入(2)、(3)、(4)式，算出 $\cos Z$，$\sin A$，$\cos A$。在 $\cos Z$ 式中纬度 φ 以地心纬度 φ' 代之。

$$\varphi' = \varphi - \alpha \sin 2\varphi \tag{21}$$

式中 α 为地球扁率。

(5) 计算太阳的 $\frac{c_s}{r_s}$，$\cos Z_s$，$\cos A_s$，$\sin A_s$

$$\frac{c_s}{r_s} = 1 + 0.0168\cos(h - p_s) + 0.0003\cos(2h - 2p_s) \tag{22}$$

$$\lambda_s = h + 0.0335\sin(h - p_s) + 0.0004\sin(2h - 2p_s) \tag{23}$$

$$\sin\delta_s = \sin\varepsilon \sin\lambda_s \tag{24}$$

$$\cos\delta_s \cos t_s = \cos\lambda_s \cos\theta + \sin\theta \cos\varepsilon \sin\lambda_s \tag{25}$$

$$\cos\delta_s \sin t_s = \cos\lambda_s \sin\theta - \cos\theta \cos\varepsilon \sin\lambda_s \tag{26}$$

以上列各量代入(2),(3),(4)式求出太阳的 $\cos Z_s$，$\sin A_s$，$\cos A_s$

最后代入(10)和(11)式，即得以微伽为单位的固体潮的水平分量——南北分量 X 和东西分量 Y。若化为以毫秒为单位，只需将最后的结果乘以常数 c，即

$$\text{南北分量}\quad \xi = c \cdot X \tag{27}$$

$$\text{东西分量}\quad \eta = c \cdot Y \tag{28}$$

$$c = 0.21 \text{ 毫秒}$$

在上述公式的推导过程中，为简单起见，把地球当作球体；在月亮的黄经、黄纬及月地距离各式中略去了系数小于 0.0005 的各项；在计算地方恒星时时以太阳的平黄经代替平赤经。由于这些近似，在水平分量 ξ 和 η 中引进了误差。现对这组公式的精度作一讨论。

(1) 未顾及地球扁率的影响：

设 x 点处地心纬度与地理纬度之差为 ε，于是

$$\xi = -\left(\frac{\partial V}{a\partial\varphi}\cos\varepsilon - \frac{\partial V}{\partial a}\sin\varepsilon\right) \tag{29}$$

由于 ε 为一小量，故可令

$$\cos\varepsilon = 1$$

$$\sin\varepsilon = \varepsilon$$

因此，不顾及地球的扁率，则引入误差

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial a}\varepsilon$$

式中 $\frac{\partial V}{\partial a}$ 为固体潮的垂直分量，最大为 300 微伽左右，所以在

南北分量上的误差

$$\Delta_1 = 300\frac{12'}{3437} = 1.047 \text{ 微伽}$$

$$= 0.022 \text{ 毫秒}$$

(2) 在月亮的黄经 λ、黄纬 β 及月地距 $\frac{c}{r}$ 表示式中略去小项的影响。

在公式(14),(15),(16)中,略去了系数小于 0.0005 的各项。为了估计略去项的大小,对布朗月亮表中系数 0.0001 至 0.0005 的各项作了最大值的估算,可以认为:

$$|d\lambda|_{\text{最大}} \leqslant 0.0015$$

$$|d\beta|_{\text{最大}} \leqslant 0.0010$$

$$\left|d\left(\frac{c}{r}\right)\right|_{\text{最大}} \leqslant 0.0014$$

估计对水平分量的最大影响为

南北分量

$$\Delta_2 = -154|d\lambda|_{\text{最大}} = -0.231 \text{ 微伽}$$

$$\Delta_3 = 65|d\beta|_{\text{最大}} = 0.065 \text{ 微伽}$$

$$\Delta_4 = -108\left|d\left(\frac{c}{r}\right)\right|_{\text{最大}} = -0.151 \text{ 微伽}$$

东西分量

$$\Delta_2' = -49|d\lambda|_{\text{最大}} = -0.074 \text{ 微伽}$$

$$\Delta_3' = -74|d\beta|_{\text{最大}} = -0.074 \text{ 微伽}$$

$$\Delta_4' = -228\left|d\left(\frac{c}{r}\right)\right|_{\text{最大}} = -0.319 \text{ 微伽}$$

(3) 在地方恒星时 θ 中,以太阳的平黄经代替平太阳的赤经,以及未考虑赤经章动的影响:

这二项引起恒星时 θ 的最大误差为

$$|d\theta|_{\text{最大}} \leqslant 30''$$

因此,引起水平分量的最大误差为

南北分量

$$\Delta_5 = 102|d\theta|_{\text{最大}} = 0.015 \text{ 微伽}$$

东西分量

$$\Delta_5' = 70|d\theta|_{\text{最大}} = 0.010 \text{ 微伽}$$

最后得到水平分量的精度为

南北分量

$$m = \sqrt{1.047^2 + 0.231^2 + 0.065^2 + 0.151^2 + 0.015^2}$$

$$= \pm 1.08 \text{ 微伽} = \pm 0.23 \text{ 毫秒}$$

东西分量

$$m' = \sqrt{0.074^2 + 0.074^2 + 0.319^2 + 0.010^2}$$

$$= \pm 0.34 \text{ 微伽} = 0.07 \text{ 毫秒}$$

从上述分析可得出如下结论：

（1）这组公式的精度为 ±0.2 毫秒，与垂直分量理论值的计算精度相同。

（2）该组公式的主要误差来自未顾及地球扁率的影响。由于地球的扁率对东西分量无影响，因此，该分量的精度大为提高。

（3）公式适合于电子计算机运算，运算前的数据输入量已减少到极小，只需输入台站的经、纬度 l、φ 和儒略日 T_0。

（4）根据公式所能达到的精度，适合于台站和固体潮资料分析之用。

参 考 文 献

[1] Doodson, A. T., The harmonic development of the tide generating potential, Proc. Roy. Soc., London, A, 100, (1922), 305—329.

CALCULATION OF THE THEORETICAL VALUE OF THE HORIZONTAL COMPONENTS OF EARTH TIDES

Mao Huiqin

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academic Sinica)

Abstract

The method of computation described in this article is similar to the calculation of the theoretical value of the tide gravity in 1972 using Doodson's theory of harmonic development of the tide generating potential. A set of formulas is made for calculating the theoretical value of the tide horizontal components and is suitable for the calculation on computer. The precision of computation is ± 0″.0002.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

关于精密近程无线电定位仪的精度问题*

王 广 运

摘　　要

本文讨论了精密近程无线电定位仪的精度问题。首先，论证了仪器各部件的相位关系，提出了消除各部件相移对定位精度影响的措施。接着分析了外界条件对定位精度的影响，以及由于移动台运动而产生的多普勒相移的影响。最后，简述了为保证定位精度对配置几何图形的要求。

无线电定位仪自问世以来，除了用于飞机和船舶导航外，已广泛应用于航空摄影、航空物探、海洋物探及水文测量等工程中。并给这些工程提供出精确的位置讯息，显示出强大的生命力。

近十几年来，随着无线电技术的发展，无线电定位仪的定位精度显著提高，应用范围也日益扩大。目前已经成功地应用于钻井定位、水下地形图的测绘、港口建设以及管道电缆的铺设等工程中。这许多工程对无线电定位仪提出的一个重要问题就是如何提高定位精度。例如，欲满足编制比例尺为 1:1000 水下地形图的要求，定位精度必须优于 ± 1 米。管道铺设、钻井定位等工程也要求具有同样量级的定位精度。因此，研究如何提高定位精度是研究近程无线电定位仪的重要课题。本文的目的在于，详细探讨影响定位精度的各种因素，并对这些因素进行分析。同时在分析的基础上，提出相应的措施，尽可能地消除和减弱这些影响，以提高仪器的定位精度。

一、仪器设备误差

一套完整的定位系统是由主台、副 I 台、副 II 台、若干移动台同时工作组成的。各台的仪器误差都会影响定位精度。每个台是由接收机、频率合成器、锁相环、发射机、时间控制器等部件组成。定位讯号通过各部件时均产生固定相移以及相移的随机变化，从而影响相位稳定度，即影响定位精度。为提高定位精度，必须采取各种措施，减弱和消除仪器设备误差。

下面分别分析各台的相移误差以及如何减弱和消除这些误差。

1. 主台

主台是定位系统的基准台。它发射供测量用的标准讯号。我们要求此标准讯号的相

---

* 参加本仪器研制工作的有：徐治洋、徐孝屏、陶国祥、梁础坚、陈增强、江兴义、苏炳权、林丙华、潘显章、周梅芳、王大年诸同志。

位是固定不变的，或者在允许的范围内变化。因此，必须采用高稳定度的晶体振荡器。实践证明，如能使晶体振荡器的日稳定度达到 1×10^{-8}，就能满足定位精度的要求。主台包括有频率合成器和发射机，其中存在着相位误差。但这部分误差对移动台和副台来说，其影响是相同的，能在终端测量单元中抵消掉，不影响定位精度。

2. 副台

副台是转发台。它接收主台讯号并转发出去。转发讯号的相位与主台讯号的相位应严格保持一致。我们要求，主台讯号通过副台转发时，其附加相移为零。但是，副台包括接收机、频率合成器、锁相环、时间控制器和发射机五部分，讯号通过这些部件均会引入相移。此相移不仅包含有数值较大的固定相移，而且还包含有随机相移。这就严重地影响着定位精度。我们采取了自动相位校正环路，将副台的全部附加相移和随机相移消除掉。

下面分析副台各部件的相位关系，并论证自动相位校正原理。

图 1 示出副台简化方块图。采取符号 $\phi_{高}$，$\phi_{中}$，··· 分别代表讯号通过高放级，第一中放级，…时的附加相移。

假定接收到的主台讯号的相位为 $\phi_{主}$，自动相位校正环路的任务就是使副台转发讯号的相位 $\phi_{副}$ 与主台相位 $\phi_{主}$ 相同。

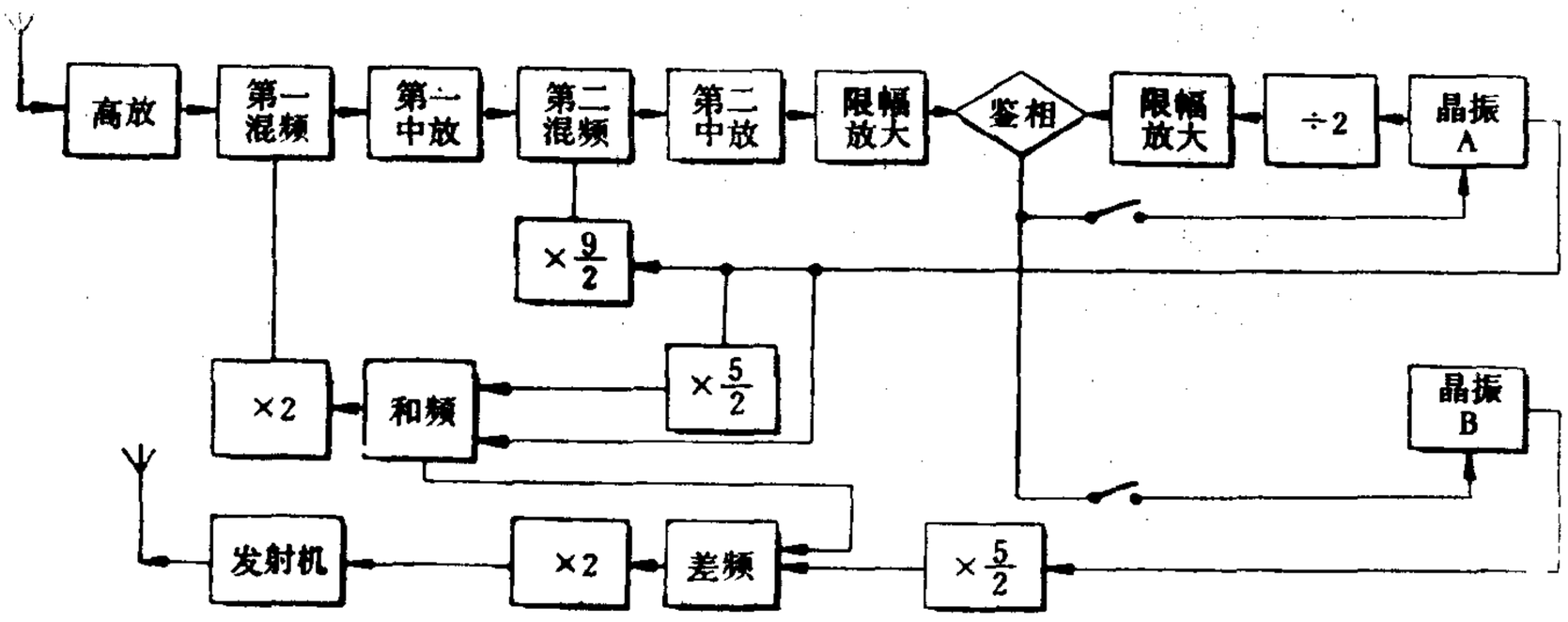


图 1　副台简化方块图

从天线接收下来的主台讯号相位 $\phi_{主}$，经过接收机各部件到达鉴相器的 P 端，其相位为：

$$\phi_P = \phi_{1本} - (\phi_{高} + \phi_{主}) + \phi_{1中} - \phi_{2本} + \phi_{2中} + \phi_{放} = \frac{5}{2}\phi_{0A} - \phi_{主} + \beta \qquad (1)$$

式中　$\beta = -\phi_{高} + \phi_{1中} + \phi_{2中} + \phi_{放}$

ϕ_{0A}——晶体振荡器 A 的初相。

晶振 A 经过分频、放大加到鉴相器的 Q 端，其讯号相位为：

$$\phi_q = \frac{1}{2}\phi_{0A} + \phi'_{放} \qquad (2)$$

此时，鉴相器两端加有相位为 ϕ_P 和 ϕ_q 的讯号电压。当 $\phi_P \neq \phi_q$ 时，鉴相器有误差电压输出，经积分放大后，去调整晶振 A 的相位，调整过程自动进行，直到 $\phi_P = \phi_q$ 时为

止。此时，晶振 A 讯号的相位与主台讯号的相位达到同步，即晶振 A 锁定于主台讯号的相位上。

设晶振 A 在同步时的相位为 ϕ_{1A}。

当 $\phi_P = \phi_q$ 时，ϕ_{0A} 改变为 ϕ_{1A}，得：

$$\phi_{1A} = \frac{1}{2}(\phi_{主} - \beta + \phi'_{旅}) \tag{3}$$

设晶振 B 在未校正时的初相为 ϕ_{0B}，经过分频、倍频、差频，然后转发出去，又由接收机接收，最后到达鉴相器 P 端时的相位为：

$$\phi'_P = \phi_{1本} - (7\phi_{1A} - 5\phi_{0B} + \phi_{发} + \phi_{高}) + \phi_{1中} - \phi_{2本} - \phi_{2中} + \phi_{旅}$$

$$= -\frac{9}{2}\phi_{1A} + 5\phi_{0B} - \phi_{发} + \beta \tag{4}$$

此时，加在鉴相器 Q 端的讯号相位为：

$$\phi'_q = \frac{1}{2}\phi_{1A} + \phi'_{旅} \tag{5}$$

当 $\phi'_P \fallingdotseq \phi'_q$ 时，鉴相器有误差电压输出，自动校正晶振 B 的讯号相位，直到 $\phi'_P = \phi'_q$ 时为止。此时，晶振 B 实现同步，其相位由初相 ϕ_{0B} 调整到 ϕ_{1B}，得到：

$$\phi_{1B} = \phi_{1A} + \frac{1}{5}(\phi'_{旅} + \phi_{发} - \beta) \tag{6}$$

副台发射的讯号是由晶振 A 和晶振 B 经分频、差频、倍频形成的，其相位为：

$$\phi_{副} = 7\phi_{1A} - 5\phi_{1B} + \phi_{发} \tag{7}$$

将(3)、(6)式代入式(7)中，并考虑到锁相环存在着同步误差 m_φ，我们最后得到副台发射讯号的相位为：

$$\phi_{副} = \phi_{主} \pm m_\varphi \tag{8}$$

从式(8)可以看出，主台讯号被接收后，经过副台的自动相位校正环，就能使副台发射讯号的相位与主台讯号的相位严格同步，而与副台各部件的附加相移和随机相移无关，只与锁相环的同步精度有关。因此，必须尽量提高锁相环的同步精度。

3. 移动台

移动台是直接测量点位坐标的设备。它由接收机、频率合成器、锁相环、时间控制器、通道放大器、终端测量显示等部件组成。各部件的附加相移采取下述方法加以消除。

图 2 示出移动台测量简化方块图。在移动台上，晶振 A 锁相于主台讯号的相位上为：

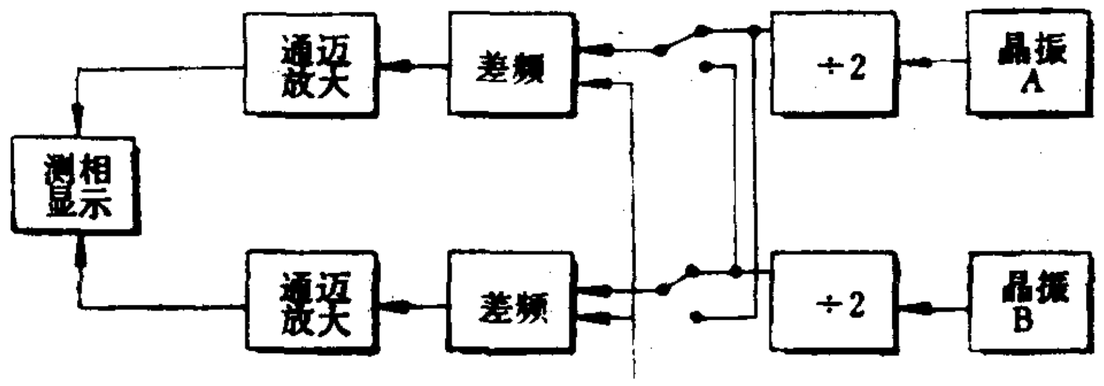


图 2　移动台测量简化方块图

$$\phi_{1A} = \frac{1}{2}(\phi_{主} - \beta + \phi'_{放}) \tag{9}$$

晶振 B 锁相于副台讯号的相位上为:

$$\phi_{1B} = \frac{5}{2}\phi_{主} - 2\phi_{副} - \frac{1}{2}(\beta - \phi'_{放}) \tag{10}$$

以式(9)表示的主台讯号送入 A 通道,经分频、差频、放大后得到低频讯号的相位为:

$$\phi_{I} = \frac{1}{4}(\phi_{主} - \beta + \phi'_{放}) - \phi'_{测本} + \phi_{低A} \tag{11}$$

以式(10)表示的副台讯号送入 B 通道,经分频、差频、放大后得到低频讯号的相位为:

$$\phi_{II} = \frac{5}{4}\phi_{主} - \phi_{副} + \frac{1}{4}(\phi'_{放} - \beta) - \phi_{测本} + \phi_{低B} \tag{12}$$

当测量开关置于"正测"时,即式(11)与式(12)进行比相,测得之相位差为:

$$\Delta\phi_{I} = \phi_{主} - \phi_{副} + \phi_{低B} - \phi_{低A} \tag{13}$$

当测量开关置于"反测"时,即晶振 A 和晶振 B 的输出交换送入 B 通道和 A 通道。此时,测量之相位差为:

$$\Delta\phi_{II} = -(\phi_{主} - \phi_{副}) + \phi_{低B} - \phi_{低A} \tag{14}$$

取"正测"和"反测"之差的平均值,得到:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}(\Delta\phi_{I} - \Delta\phi_{II}) = \phi_{主} - \phi_{副} \tag{15}$$

由以上分析看出,采用同一个接收机接收主台和副台的讯号可以消除接收机和频率合成器的附加相移;采取"正测"和"反测"的测量程序可以消除掉通道放大器的附加相移。最后测得的相位差只与锁相环 A, B 的同步精度有关。

取"正测"与"反测"之和,其结果应为一整周期数(0 或 360°)。但由于通道放大器存在着随机相移,因此其结果不等于整周期数,此差值即为通道随机相移。在测量中应规定此随机误差不超过某一限差,以此来校核和检查测量成果正确的程度。

根据以上分析,我们可以看出,如要提高定位精度,必须对仪器设备采取如下措施:

(1) 主台各部件的起始相移和随机相移,对两个副台和移动台具有相同的影响。在测量中可以互相抵消,不影响定位精度。但是,起始相位的漂移,会造成双曲线格网的漂移。因此,要求主台的主控振荡器需具有 10^{-8}/日的频率稳定度,并在主台发射机上配置有自动相位校正环。

(2) 主台到副台的基线长度会引起固定相移。当地面台架设完并投入工作后,这一相移值为常数。可以由移动台上装置的格网校正单元在已知点上校正掉。也可以从测量数据中减去已知点坐标数据,加以校正。

(3) 副台必须采取自动相位校正环路,以消除副台各部件附加相移的影响。但在测量结果中,锁相环 A, B 的同步误差不能消除。因此,必须尽量提高锁相环的同步精度。

(4) 接收机的本振讯号是取自晶振 A 的讯号,经频率合成器而形成的。因为晶振 B 的同步讯号含有晶振 A 同步讯号的相位,晶振 A 的同步误差反过来影响晶振 B 的同步。因此,我们对锁相环 A, B 的要求,除了共同的技术指标外,对前者要求精度更高一些,对后者要求捕捉速度更快一些。

(5) 在移动台上，由于采用同一接收机和“正测”“反测”测量程序，各部件的固定相移可以抵消掉。但是，移动台上一个特别值得注意的问题是，当接收的讯号处于强弱变化时，接收机会引入动态误差，从而影响定位精度。由接收机产生的动态误差无法消除，在定位误差中占着较大的比重。因此，如何改善移动台接收机的幅相特性，增宽稳定工作的动态范围，是提高定位精度的关键问题。

(6) 在终端测量中采取“正测”“反测”读数法，一方面能够抵消掉通道放大器的附加相移，另一方面能及时对测量数据进行校核。

二、外界条件的影响

无线电定位的原理是基于测量两个无线电讯号之间的相位差。根据测得的相位差，在已知波长即已知电波传播速度和工作频率的情况下，求出距离差。即

$$(r_1 - r_2) = \frac{\lambda}{2} \cdot \Delta\phi = \frac{V}{2f}\Delta\phi \tag{16}$$

对式(16)进行微分，得到：

$$d(r_1 - r_2) = \frac{\Delta\phi}{2f}dv + \frac{v}{2f}d\phi - \frac{\Delta\phi \cdot v}{2f}df \tag{17}$$

式中，第一项是电波传播速度的误差，受外界条件影响很大。本节分析此影响。第二项为相位误差，是由仪器设备和外界条件两部分引起的，本节只分析后一部分的影响。第三项为频率测量误差，在目前测频精度已达 10^{-9} 的情况下，此项可略去不计。

1. 外界条件对电波传播速度的影响

无线电传播速度受电离层、大气温度、湿度和气压以及地面电导率和介电常数的影响。在近区工作范围内，可以只考虑电导率和介电常数的影响。

无线电波传波的相速 v_P 为：

$$v_P = 2\pi f \Big/ \frac{d\phi}{dr}。 \tag{18}$$

式中，$\frac{d\phi}{dr}$ 为沿传播途径特征点上相位的变化。所以相位为：

$$\phi = 2\pi f \int_0^r \frac{dr}{v_P} \tag{19}$$

$$v_P = f(\varepsilon, \sigma) \tag{20}$$

经过实际测定证明，无线电波在海面上 ($\varepsilon = 80$, $\sigma = 4$ 姆欧/米)和干燥土地上 ($\varepsilon = 4$, $\sigma = 10^{-3}$ 姆欧/米)的传播速度相差约 200 公里。

如果在一个测区内，电波经过不同的地表面传播而采用同一种速度值，则会使测量结果引入误差。

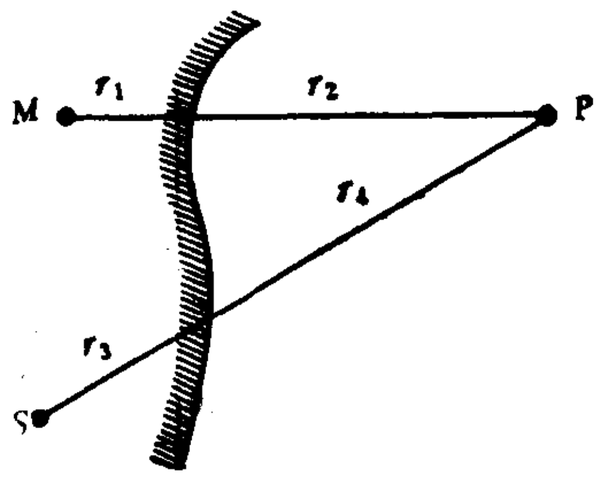


图 3　测量原理图

在图 3 中，M 为主台，S 为副台，P 为移动台。r_1, r_3 为电波在陆地上传播的距离，r_2, r_4 为电波在海面上传播的距离，v_l 为电波在陆地上传播速度，v_w 为电波在水面上的传播

速度。

在 P 点上，理论上的相位差为：

$$\Delta\phi'_P = \phi_M - \phi_S - 2\pi f\left(\frac{r_1 - r_3}{v_l} + \frac{r_2 - r_4}{v_w}\right) \tag{21}$$

实际上，测量时只选用一种传播速度，例如采用 v_w。因此，实际测得之相位差为：

$$\Delta\phi''_P = \phi_M - \phi_S - 2\pi f\left(\frac{r_1 - r_3}{v_w} + \frac{r_2 - r_4}{v_w}\right) \tag{22}$$

实测值与理论值之差就是电波速度改正数：

$$\delta = 2\pi f\left(\frac{r_1 - r_3}{v_w} - \frac{r_1 - r_3}{v_l}\right) \tag{23}$$

设 $v_l - v_w = \Delta v$，$r_1 - r_3 = \Delta l$ 得：

$$\delta \doteq \frac{2\pi f \Delta l \Delta v}{v_w^2} \tag{24}$$

在我们工作情况下，如果采用 $v_w = 299700$ 公里/秒，$\Delta v = 200$ 公里/秒，$f = 2.0$ 兆赫，$\Delta l = 2$ 公里，则

$$\delta = 0.009 \text{ 相位周期}$$

这就是说，如果要保证定位精度为 ± 1 米，在测区内应选择适当的主副台位置，使得能在整个测区内具有相同的地面导电率和介电常数，以其保证电波传播速度的稳定。如果测区内的电波传播途径，其导电率和介电常数差异较大，就必须引入按式(24)计算的电波速度改正数。

2. 外界条件对相位的影响

首先，我们简要说明电波相位延迟的问题。

由于地表面不是理想导体，所以当电波沿地面传播时，部分电磁能量从大气渗入地下。因此，地面上每一点的场强要比理想导电地面上空的场强减小了，同时电波传播的相速也降低，产生了相位延迟。这种场强降低和相速降低一般用衰减因子表示：

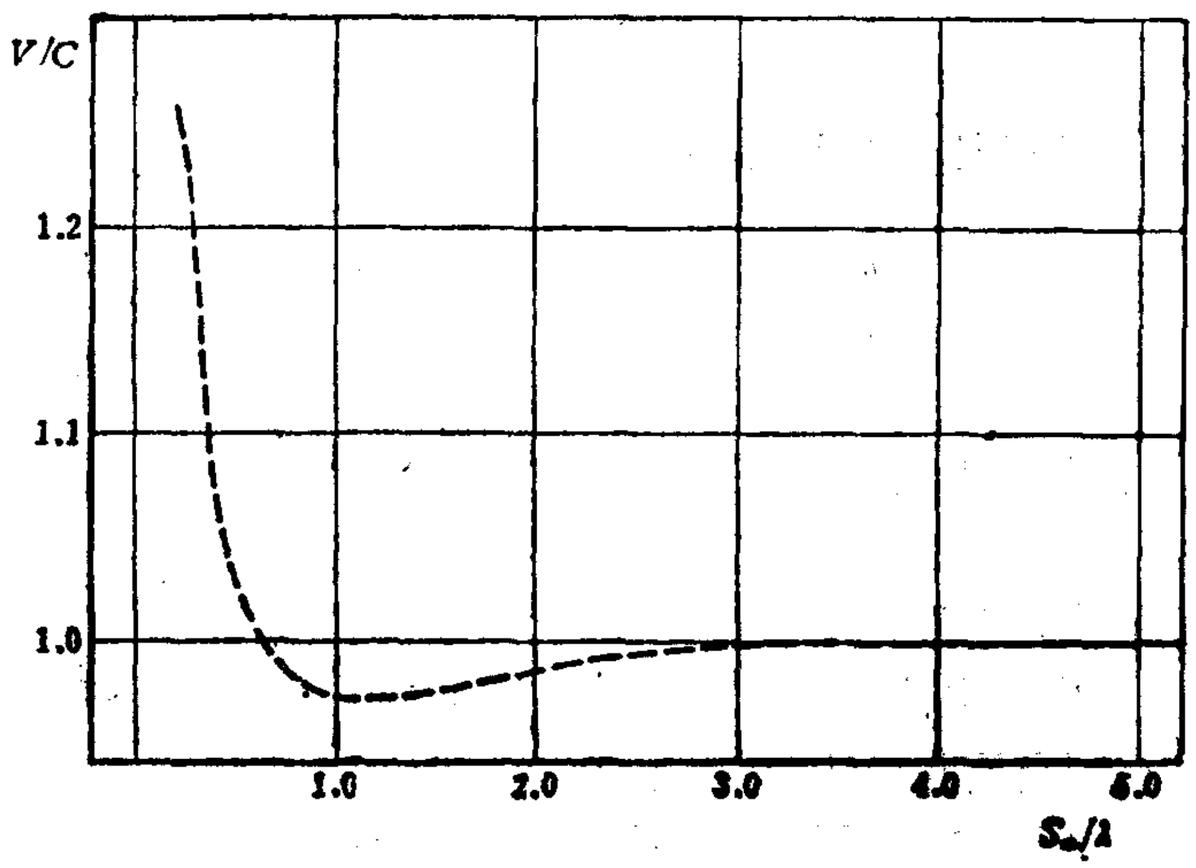


图 4 1.9 兆赫频率的电波在海面上传播时的相位延迟

$$k = f(R, \varepsilon_r, \mu, \sigma, \omega)。 \tag{25}$$

衰减因子与距离的平方成反比，与频率成正比，与电导率和介电常数成反比。这里我们引出 Koblenz 刊出的图表——1.9 兆赫频率的电波在海面上传播时的相位延迟。在 20 公里范围内，相位延迟达到 0.03 相位周期。在进行精密测量定位时，必须按图 4 所示的图表进行相位延迟改正。

下面我们再说明测量点离开发射机的最短距离。

在发射天线附近，由于存在着相干效应，所以出现相位场失真的现象。在天线区内，电波不是按正弦波传播，而是疏密不匀，畸变失真。如果在这一区域内进行测量时，就会引入较大的误差。

相场失真区有多大？离发射机的最短距离是多少？这个问题，在许多关于无线电定位测量的著作中都曾提及过，也做过某些限制规定。这里引出了 W. Lohrberg 为此做过的试验成果。这次试验是在 1.9 兆赫频率上进行的。当离开发射机的距离为 3λ 时，就可得到较满意的结果。因此，得出结论，我们规定离发射机的距离最短为 5λ 是比较适宜的。

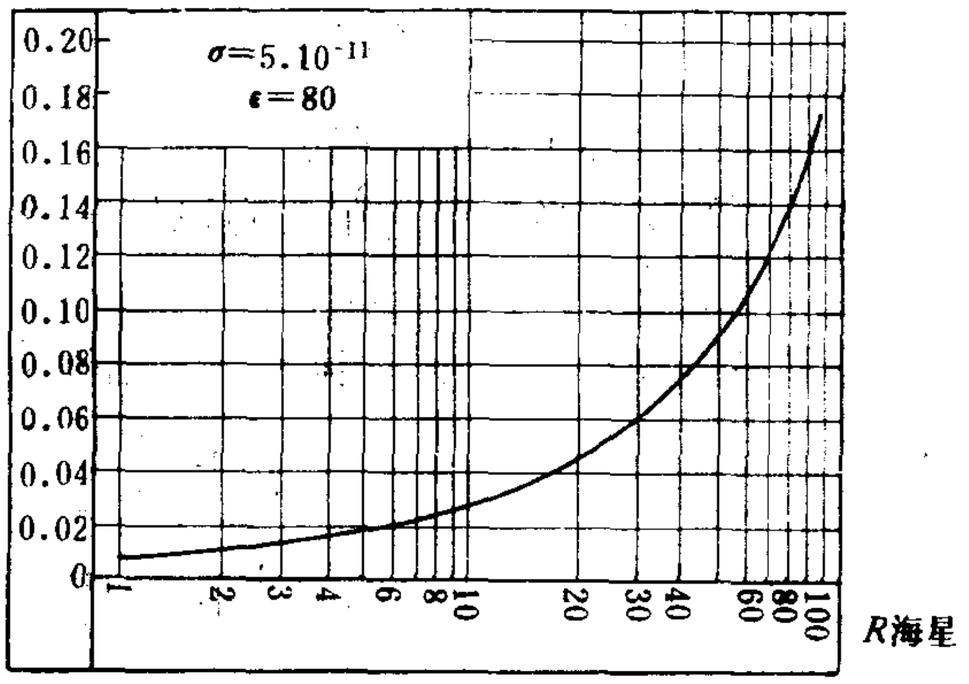


图 5　近区 V/C 图
(C=299292.5 公里/秒)

三、移动台运动产生多普勒相移的影响

在时间分割法的定位系统中，移动台接收主台和副台讯号不是在同一时刻。（图 6）在 t_1 时刻接收并同步主台讯号，在 t_2 时刻接收并同步副台讯号。移动台是在 t_2 时刻进行测量的。这样一来，出现了 t_1 时刻的主台讯号和 t_2 时刻的副台讯号进行比相的问题，即出现了由于移动台运动是否会引入定位误差的问题。下面就这个问题进行分析。

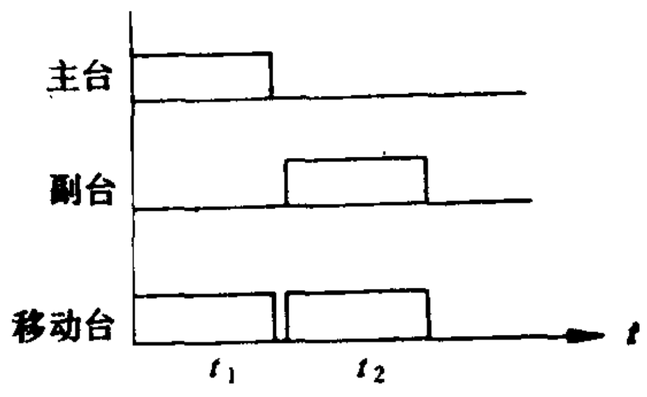


图 6　工作程式图

设从 A 点发射频率为 f 的电磁波，由移动台接收。如果移动台运动速度为 $v = \frac{dD}{dt}$，在接收讯号时所产生的多普勒频移为：

$$\Delta f = \frac{f}{C}\frac{dD}{dt} \tag{26}$$

如果移动台运动速度限定在一定范围内，例如当 $f = 2$ 兆赫时，$v < 500$ 公里/小时，多普勒频移不超过 1 赫，只产生多普勒相移。

如果在 P_1 点接收讯号，且 $AP_1 = D$，移动台的运动速度为 v，则在 P_1 点上接收到的讯号相位为：

$$\Delta\phi = \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}\frac{dD}{dt}\cdot t \tag{27}$$

式中，第一项为固定相移，第二项为多普勒相移。

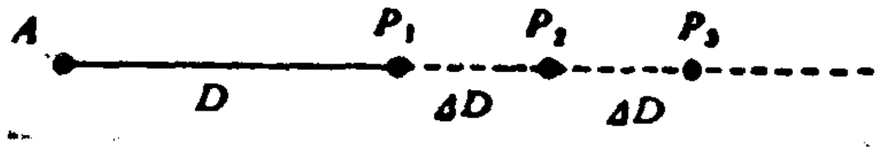


图 7　测量示意图

如果在移动台上装有锁相接收机，并在 $t=0$ 时与接收来的讯号进行锁相，此时振荡器记忆的相位为：

$$\Delta\phi_1 = \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}\frac{dD}{dt}\cdot t\Big|_{t=0} = \frac{\omega D}{C} \tag{28}$$

现在讨论二种可能的情况。

第一种情况　当振荡器在 P_1 点已锁定了这个相位后，接收机闭锁。此时，当移动台继续以等速运动，经过 $t=\Delta t$ 时，到达 P_2 点，移动了 ΔD 的距离。由于振荡器记忆有固定相移和多普勒相移，故此时振荡器的相位也随 Δt 的时间而变为：

$$\begin{aligned}\Delta\phi_2 &= \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}\frac{dD}{dt}\cdot t\Big|_{t=\Delta t}\\ &= \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}\frac{dD}{dt}\Delta t = \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}\Delta D\end{aligned} \tag{29}$$

同样，再经过 Δt 时间，到达 P_3 点，又移动 ΔD 的距离，则相位变为：

$$\Delta\phi_3 = \frac{\omega D}{C} + \frac{\omega}{C}(\Delta D + \Delta D) \tag{30}$$

由以上分析看出，由于振荡器记忆的相位含有多普勒相移部分，它是随时间而变化的。尽管以后再没有接收外来讯号，但相位仍然随时间而变化。这就是说，当 $t=0$ 时刻同步了外来讯号，其后不管移动台运动状态如何，振荡器将随时间按式 (29)，(30) 而变化。

第二种情况　移动台分别在 $P_1, P_2, P_3\cdots$ 各点接收讯号并进行锁相。

当在 P_1 点进行锁相和测量时，其相位为：

$$\Delta\phi_1' = \frac{\omega D}{C} \tag{31}$$

当在 P_2 点进行锁相和测量时，其相位为：

$$\Delta\phi_2' = \frac{\omega}{C}(D + \Delta D) \tag{32}$$

同样，在 P_3 点上测量出的相位为：

$$\Delta\phi_3' = \frac{\omega}{C}(D + 2\Delta D) \tag{33}$$

以上推导看出，在移动台运动的方向和速度不变的情况下，所得到的相位是相同的。即

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1 &= \Delta\phi_1'\\ \Delta\phi_2 &= \Delta\phi_2'\\ \Delta\phi_3 &= \Delta\phi_3'\end{aligned} \tag{34}$$

通过以上分析，我们清楚地看到，由于振荡器同时记忆了多普勒相移，而此相移的大

小取决于移动台的瞬时速度。只要移动台继续保持原有的速度和航向运动，对测量定位不会引入误差。实际上，速度和航向可能有某些改变，也会带来不大的误差。为了减小这部分误差，测相取样间隔小于 0.5 秒。这样，在评定定位精度时就可以不再考虑这部分误差了。

四、几何图形的影响

在导航和定位中最常用的坐标系统是圆系统和双曲线系统。不论那一种系统，测量点在坐标系中的位置不同，其精度也不同。关于几何图形的分析，许多测量书籍中已经做了详尽的描述。本节的目的在于，根据已经导出的公式，结合精密近程定位仪的要求，提出满足精度要求的工作区。

在圆坐标系统中，定位误差为：

$$M_P = \pm \frac{\sqrt{2}\, m_r}{\sin \alpha} \tag{35}$$

式中，α 为测量点对主副台所张之角。

假定 $m_r = \pm 1.0$ 米，计算 M_P 示于表 1。

表 1　圆坐标系统中的定位误差

α	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
M_P	2.83	2.20	1.85	1.63	1.50	1.44	1.41	1.44	1.50	1.63	1.85	2.20

在双曲线坐标系统中，定位误差为：

$$M'_P = \pm 2\sqrt{2}\, m_a \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta - \sin 2\theta} \tag{36}$$

式中

$$\theta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$$

假定 $m_a = \pm 1.0$ 米，计算 M'_P 示于表 2。

表 2　双曲线坐标系统中的定位误差

θ	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
M'_P	3.96	2.12	1.61	1.13	1.07	1.01	0.94	0.92	0.94	1.05	1.19

从表 1 和表 2 看出，要保证定位精度为 ±1 米，必须在保证仪器误差 m_r 或 m_a 为 ±0.5 米的情况下，并且选择在 $50° < \theta < 130°$ 的工作区内。

五、结束语

为使精密近程无线电定位仪能在水域测量和测设中进一步推广应用，必须努力提高定位精度。为此，应从下列几方面着手。

（1）提高整机的相位稳定度。主要措施有：提高晶体振荡器的频率稳定度；提高锁相环的同步精度和捕捉能力；展宽接收机的动态范围，改善其幅相特性。

（2）减弱外界条件的影响，进行相位延迟改正。除工作在目前常用频率 $f = 2.0$ 兆赫上外，考虑提高发射频率。建议采用 18 兆赫和 36 兆赫。据国外资料介绍，上述频段的电波传播稳定性并不比 2.0 兆赫的电波传播稳定性差。

（3）作业时，主副台应合理配置。一方面使在测区内的电波传播途径的电参数尽量相同；另一方面使尽量工作在所需等精度线控制的区域内。

参考文献

[1] Lohrberg, W., Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Bereich Von 1.9MHz, Deutsche Geodätische Kommission, (1966), S. 14.

[2] Laurila, Simo H., Electronic Surveying and Navigation, John Wiley & Sons, New York, (1976).

ON THE ACCURACY OF THE SHORT RANGE RADIO POSITIONING EQUIPMENT

Wang Guangyun

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the accuracy of the accurate short range radio positioning equipment is discussed. First, the phase relation in various components of instrument is argued, and the methods of removing the influence of the phase shift are proposed. Further, the effect of the external condition on the position accuracy, and that of the Doppler phase shift yielded due to the motion of the mobile station are analysed. Finally, it is briefly described that, in order to guarantee the position accuracy, the requirement of geometric configuration is proposed.

第 3 号　　测量与地球物理集刊　　No. 3
1981 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1981

半导体管参数变化对精密仪器精度影响的探讨

徐治洋

摘　　要

随着地球动力学这门科学的深入发展，日益提出要有高精度的观察和测量仪器。半导体管虽然早已代替电子管应用在许多仪器之中，但在各种高精度的地球动力学观察和测量仪器中，半导体管参数变化是造成精度下降的主要原因之一。本文从半导体管的物理基本概念出发，探求了诸如环境温度，输入讯号幅度的变化，频率的改变等等原因引起半导体管参数变化而导致精度下降问题。从而对改善现有高精度地球动力学观察和测量仪器以及为设计新的有关仪器提供部分参考的改进方法。

造成半导体管参数的变化原因有很多种，但基本上可分为两类；第一类是外界条件变化，诸如温度改变、电源电压改变以及待处理的讯号幅度或频率改变等等；另一类是半导体管本身结构和工艺缺陷，诸如异型锗渗杂量的不妥，锗片表面处理不当以及密封性能不好等等。这些参数的变化，不同程度地影响仪器精度，现逐一讨论。

1. 输入阻抗受输入讯号幅度改变的影响

不论高频放大，中频放大等等回路，半导体管以共发射极形式为例，当有讯号注入时，流经基极—发射极之间的 P-N 结电流，按下列方程式表示[1]：

设偏压为 E，外注入讯号为：

$$e = u\sin\omega t$$

则流经 P-N 结的基波电流幅度为：

$$I_{基} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i(t)\sin\omega t d(\omega t) = \frac{I_0}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{q}{KT}(E+u\sin\omega t)}\sin\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2I_0}{\pi}e^{\frac{qE}{KT}}\int_{-1}^{+1}\frac{xe^{ax}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

其中 I_0——P-N 结反向饱和电流；q——电子电荷；K——波兹曼常数；T——绝对温度。

此积分不能求得初等函数值，我们只能用数值积分来表示上式中的反常积分，当 $a \ll 1$ 的小幅度情况下，得到：

$$I_{基} = \frac{3.1I_0a}{\pi}e^{\frac{qE}{KT}}$$

所以输入电阻 $R_{入}$ 为：

$$R_{入} = \frac{\pi\varphi_T}{3.1I_0} e^{-\frac{qE}{KT}}$$

其中 $\varphi_T = \frac{KT}{q}$ 即所谓热电势。

由此可知，当输入讯号小时，输入电阻随 I_0 的减少而增加，并随输入讯号幅度增加而指数律地减小。我们曾经设计制造过的精密仪器中，在高频电路中经常用到调谐电路，其次级与下一级的半导体管输入迴路并联。半导体输入阻抗的改变，经次级反射到调谐迴路的初级。调谐迴路有电阻并联时，其相位提前或滞后角为：

$$\phi = \tan^{-1} R \frac{X_L - X_C}{X_L X_C}$$

其中 R 为并联电阻，X_L 和 X_C 相应地是迴路感抗和容抗。

显然，在调谐时，$X_L = X_C$，无相移存在。但在失谐时，不同的并联电阻则引起不同的相移。以曾使用的 100 千赫的调谐槽路为例。我们使用的电容为 $C = 425$ 微微法，电感为 $L = 4.75$ 毫亨。表 1，2，3 给出了电容离谐 ΔC 最大为 13 微微法时，R 为 20 千欧和 25 千欧时的相移。可以看出，当失谐量以电容表示为 $\Delta C/C = 1/35$ 时，并联电阻由 20 千欧变化到 25 千欧时相移达到 2°。见图 1，这样的失谐量，由于调整仪器时不正确或者仪器受震，环境温度变化等原因而轻易达到。所以当仪器接近或远离发射台时在高放级的输入讯号幅度是变化很大的，输入阻抗的改变，当然要引起相移。要使接收设备的前端高放级就要设法自动限幅、恒幅。

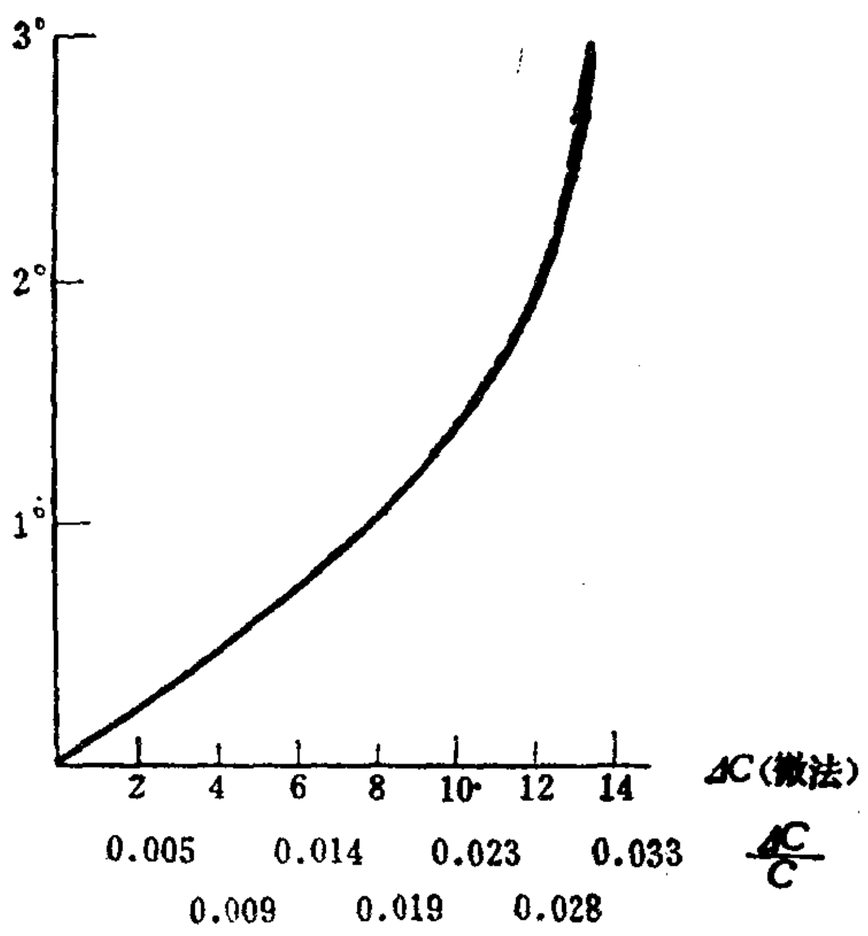


图 1

特别要提到的是，当失谐量越大，虽然同样的并联电阻变化量，引起的相移也越大，且以指数率上升。所以设计时要采取各种措施以防调谐槽路渐渐失谐。在调准仪器时要准确调谐。

表 1 $R = 20$ 千欧

$\Delta C = C_i - C_0$（微法）	C（微法）	$1 + X_L/R\tan\varphi$	$\tan\varphi$	φ
0	425	1	0	0°
1	426	1.001	0.0060	0°21′
3	428	1.007	0.0418	2°23′
5	430	1.012	0.0718	4°06′
9	434	1.020	0.1198	6°50′
11	436	1.025	0.1498	8°31′
13	438	1.029	0.1763	10°

表 2 $R=25$ 千欧

$\Delta C = C_i - C_0$（微法）	C（微法）	$1 + X_L/R\tan\varphi$	$\tan\varphi$	φ
0	425	1	0	0°
1	426	1.0011	0.0082	0°28′
3	428	1.0060	0.0448	2°34′
5	430	1.0110	0.0821	4°42′
9	434	1.0190	0.1418	8°04′
11	436	1.0240	0.1763	10°
13	438	1.0310	0.2308	13°

表 3

ΔC（微法）	φ_1（$R=20$ 千欧）	φ_2（$R=25$ 千欧）	$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$
1	0°21′	0°28′	0°07′
3	2°23′	2°34′	0°11′
5	4°06′	4°42′	0°36′
9	6°50′	8°04′	1°14′
11	8°31′	10°	1°29′
13	10°	13°	3°00′

2. 频率改变对输入阻抗及相位的影响

众所周知，半导体管高频共发射极运用的等效电路如图 2 所示[2]。

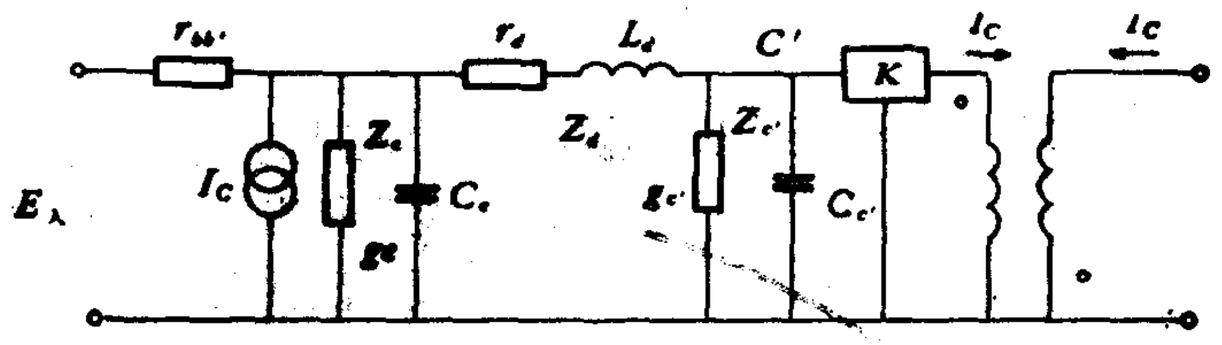


图 2

为了简化分析，我们引入短路输入阻抗 $1/Y_{11e}$ 的概念来进行讨论。短路输入阻抗的定义是，输出端在交流短路时的输入阻抗。虽然不能反映出阻抗反射的影响，但分析却方便得多。输出短路，表示 K 放大器的短路，也使节点 C' 接地。因此，图 2 可以简化成图 3(a)所示，根据定义，集电极电流是只流经 Z_e 的电流，所以短路输入阻抗如图 3(b)所示，其表示式为：

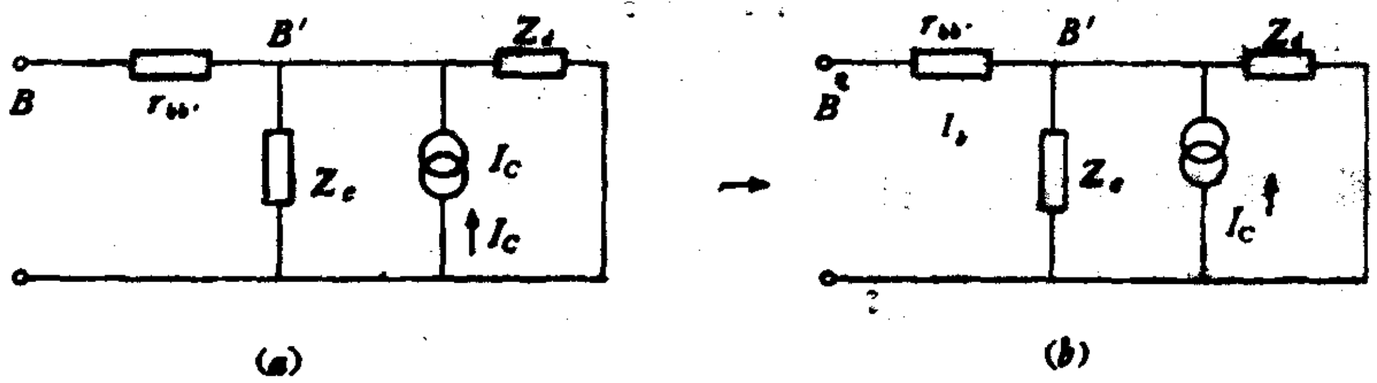


图 3

$$1/Y_{11e} = r_{bb'} + Z_e$$

其中

$$Z_e = \frac{1}{q_e} + j\omega C_e$$

以下列参数的半导体管进行计算，基层扩展电阻 $r_{bb'}$ = 310 欧；发射极电导 q_e 为 0.002 姆欧；发射结电容为 C_e = 0.2 微法，则可得到图 4 下面的曲线所示的频率与输入阻抗之间的关系，而相应的相位变化如图 4 上面的曲线所示。

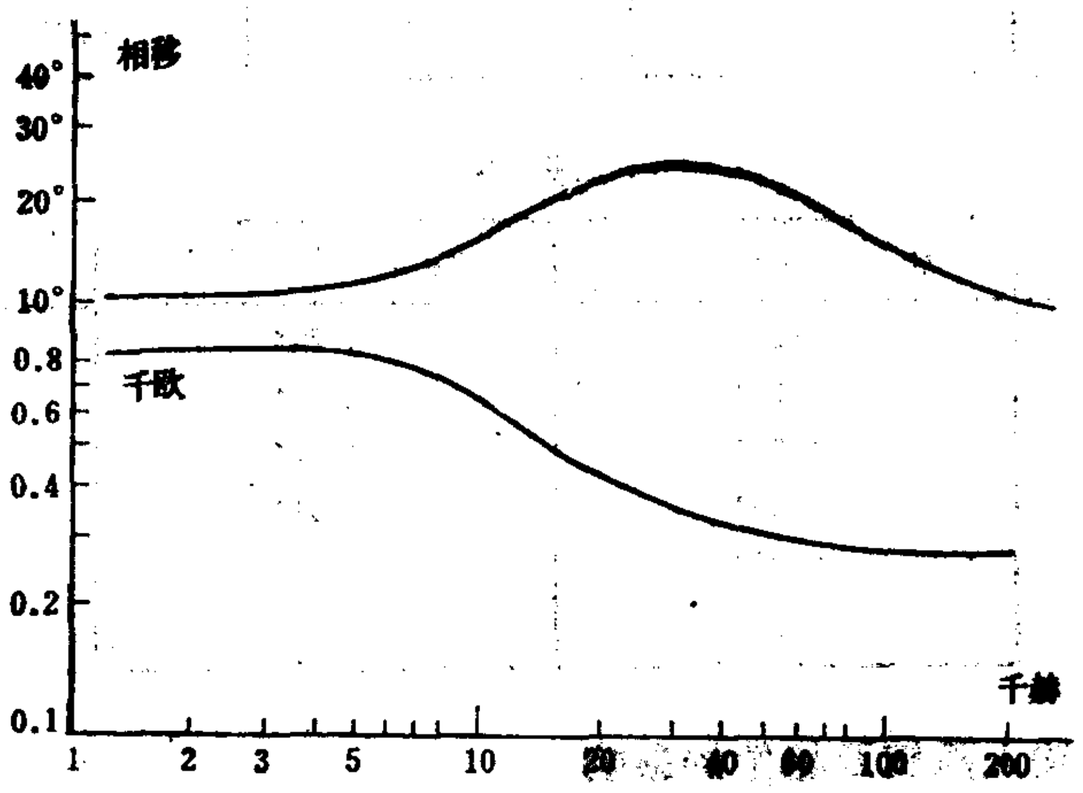


图 4

$$\left(\frac{1}{Y_{11e}} = 310 + \frac{510}{1 + j\frac{f}{15}}\right)$$

可以看出，频率由 10 千赫变化到 20 千赫，这时输入阻抗变化的梯度最大。10 千赫的变化相当 300 欧的变化。假使我们的频率漂移大到 0.5 千赫，引起输入阻抗的变化为 15 欧，这将引起 5° 左右的相移。

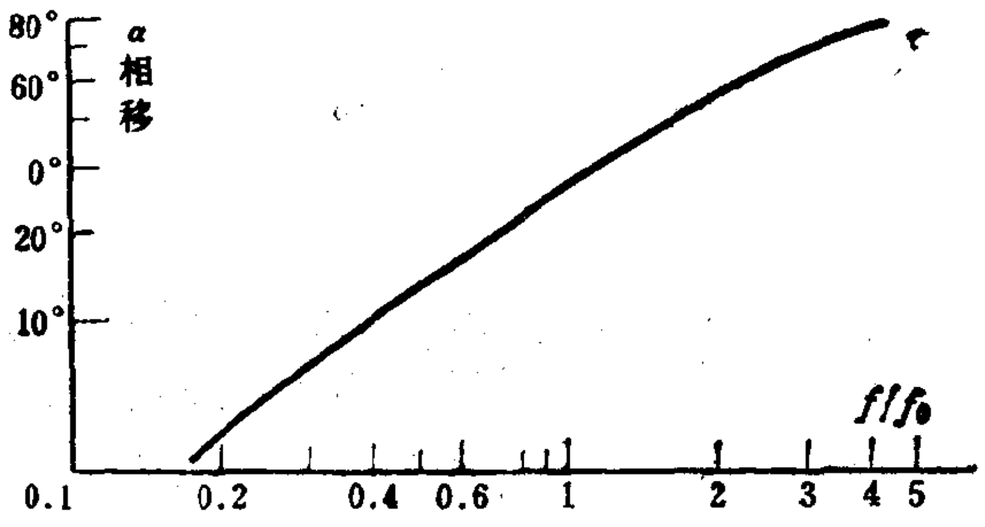


图 5

频率的改变还引起电流放大系数的改变，和使集电极与发射极电流之间的相位差变化[3]，如图 5 所示。以中心频率 2000 千赫为例，漂移 500 千赫时，相移可达 15° 左右。这样的频率不稳是不可思议的，但在我们试制的仪器中，有时某些高放槽路是轮流通过几套频率，这些频率可能相差达 500 千赫，因此，在相关时就要差到 15° 左右的相位了。

3. h 参数受电流及温度变化的影响

用矩阵方式来表示的 h 参数是：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{或}$$

$\left.\frac{\partial V_1}{\partial I_1}\right|_{V_2=0}$ h_{11b} 为共基极时，输出端交流短路时的输入阻抗

$\left.\frac{\partial V_1}{\partial V_2}\right|_{I_1=c}$ h_{12b} 为共基极时，输入端开路时的反向电压放大系数

$\left.\frac{\partial I_2}{\partial I_1}\right|_{V_1=c}$ h_{21b} 为共基极时，输出交流短路时的电流放大系数

$\left.\frac{\partial I_2}{\partial V_2}\right|_{I_1=0}$ h_{22b} 为共基极时，输入端交流开路时的输出导纳

在文献[4]中提到，对合金型半导体管来说

$$h_{11} \simeq \frac{K_1}{I_E} + r_{bb'}(1-\alpha_b) \tag{1}$$

$$h_{12} \simeq K_2 V_{CB}^{1/2} + r_{bb'}(K_3 I_E V_{CB}^{1/2} + h_{22b} + j\omega C_{CT(1)} V_{CB}^{1/2} \tag{2}$$

$$h_{21} \simeq -\alpha_b \tag{3}$$

$$h_{22} \simeq K_3 I_E V_{CB}^{-1/2} + h_{22b} + j\omega C_{C_T+(1)} V_{CB}^{-1/2} \tag{4}$$

由式(3)可以看出，由于 α_b 与 I_E 有关，h_{21} 也是 I_E 的函数，当发射极电流增加时，h_{11b} 也同时随 I_E 而变。式(1)中的 $(1-\alpha_b)$ 不是常量，h_{11} 也随 I_E 而变。由此可知，共基，共发运用时，I_E、V_C 等变化的影响如图 6，7，8 曲线所示。

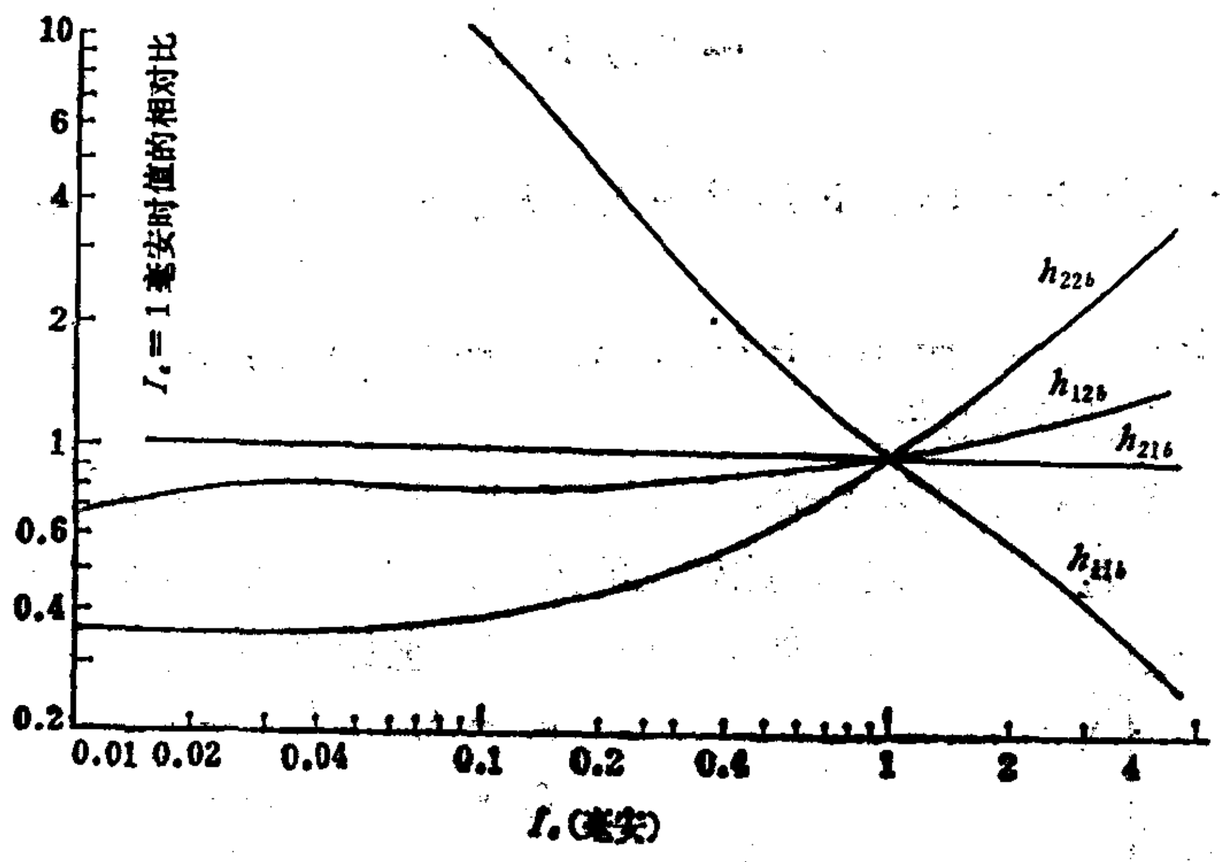


图 6

($V_c = -6V, I_1 = 1$ 毫安)

从图 6、7、8 的曲线可以看出，共基极运用时，如果 I_e 选用在 0.75 毫安时，h 参数变化是很小的。共发射极运用时，h 参数的变化基本上是随 I_e 变化而直线变化。如果说，I_e 由 0.8 毫安变化到 1.2 毫安时，引起 h_{11e} 的变化约为 3.1 千欧变化到 2.2 千欧。经耦合反射到调谐槽路，接近前面所提到的数度的相位移。

h 参数的变化会导致放大器的不稳定，当半导体放大器的输入或输出阻抗（或导纳）的实数部分是负的，则被认为放大器进入不稳定状态。当一半导体管接入迴路时，设讯号源阻抗为 Z_g，负载的导纳是 Y_L，则输入阻抗 $Z_{入}$ 为：

$$Z_{入} = h_{11} - h_{12}h_{21}/(h_{22} + Y_L)$$

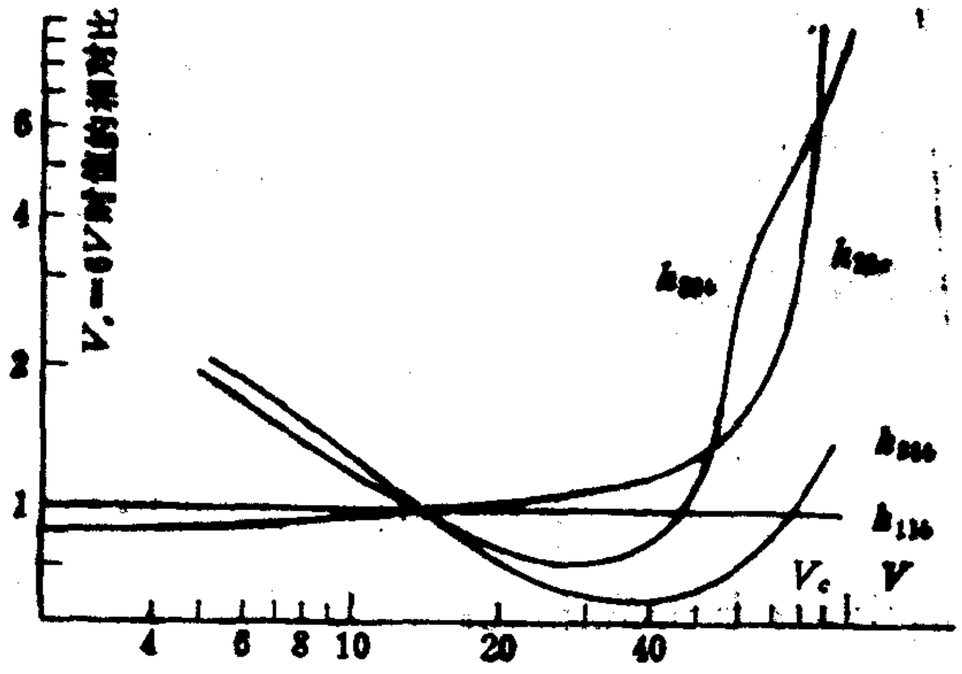


图 7

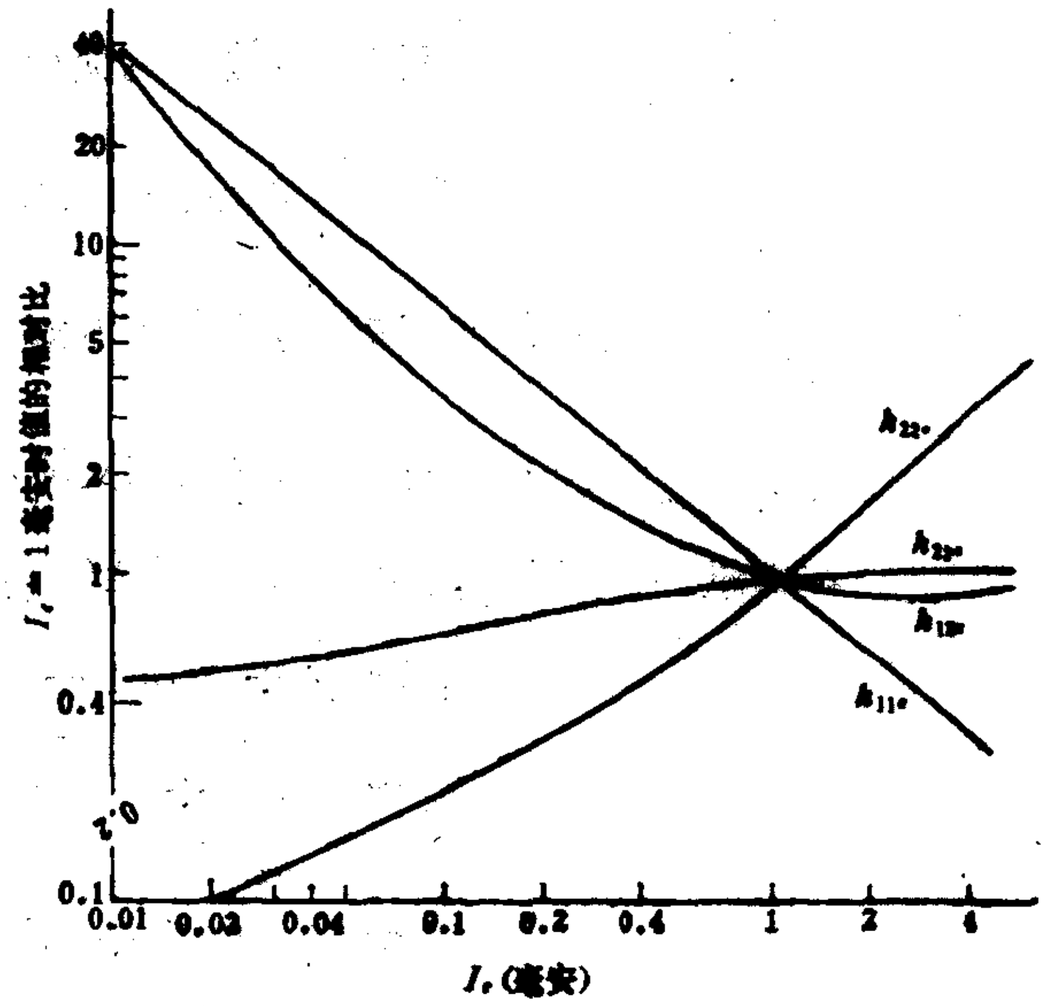


图 8
($V_c = 6V$, $I_c = 1$ 毫安)

可以换写成

$$Z_{入} = Z_{入R} + jZ_{入I}$$

当

$$h_{11R}(h_{22R} + G_L)^2 + h_{11c}(h_{22I} + B_L)^2 - h_{mR}(h_{22R} + G_L) - h_{mI}(h_{22I} + B_L) = 0 \qquad (5)$$

成立时，$Z_{入R} = 0$。

其中 $h_{11} = h_{11R} + jh_{11I}$，$h_{22} = h_{22R} + jh_{22I}$，$h_{12}h_{21} = h_m = h_{mR} + jh_{mI}$，$Y_L = G_L + jB_L$

下标 R 表示实数，I 表示虚数[5]。

如以 G_L 代表 X 轴，B_L 代表 Y 轴，式(5)代表 Y_L 平面上的一个面，即 $Z_{入R} = 0$ 时的轨迹，在此轨迹的外边是实数，轨迹之内是负数，也即不稳定区。如图 9 所示，圆的坐标为：

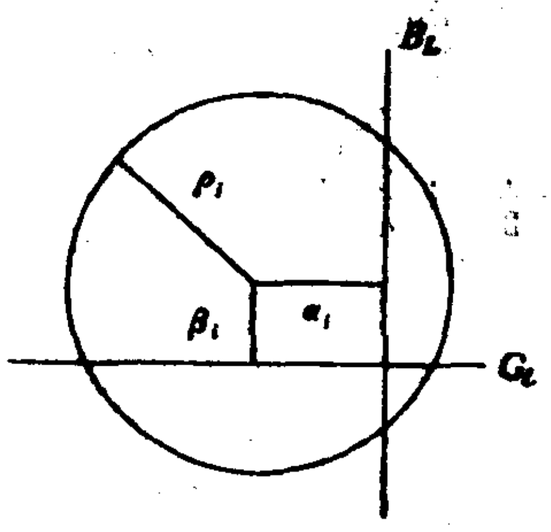


图 9

$$\alpha_i = h_{mR}/2h_{11R} - h_{22R}$$
$$\beta_i = h_{mI}/2h_{11R} - h_{22I}$$
$$\text{半径 } \rho_i = |h_m|/2h_{11R} \qquad (6)$$

当温度升高时，h_{11b} 是下降的，h_{21b} 基本不变，这时 ρ_i 变大。这样就导致不稳定区扩大，原来在半径为 ρ_i 圆圈之外的轨迹，现在有可能列在圆圈以内了；原来是稳定的通路，现在变为不稳定了。为了比较可以信赖地解决这一问题，一种方法是在偏置时选用稳定系数好的电路；另一种方法就是在输入通路中串入电阻使输入阻抗 h_{11R} 增大的方法来解决，从式(6)可以看出，h_{11R} 加大则不稳定区就缩小了。但这种方法会带来一些有用讯号的损耗。

这里必须提到一些自动增益电路的利弊，有些自动增益电路是以改变某一级发射极电流的方法来改变该级的增益。根据以上数节的探讨，I_E 的改变显然会使电路附加的相

位改变。因此，当精密的相位式无线电定位仪在测区内工作时，由于场强改变，自动增益工作使 I_E 改变，相位改变而引起测量误差。为此，也有不少无相移的自动增益控制电路论文发表。

4. 单向化问题

对电子管来说，单向化的问题比较小，即讯号由栅极输入，由屏极单向负载输出放大较容易做到，而半导体则较难。除了用前面所提到的方法来消除这种不稳定性以外，常用的方法是中和电路，这种解决单向化的方法用得很多。

单向化方法的原理如图 10 所示。

半导体后面接了一个倒相变压器，然后和中和网络在输入端和输出端并联。合成网络的 Y 参量是二个并联网络之和，即反馈导纳为：

$$Y''_{12} = -Y_{12} + Y'_{12}$$

要使 $Y'' = 0$，必须 $Y'_{12} = Y_{12}$

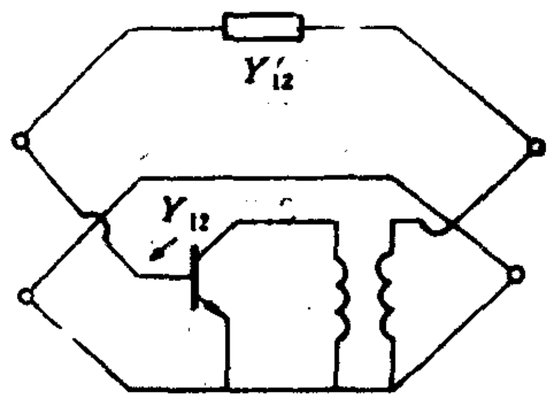


图 10

在高频时，Y_{12} 是容性的，所以，Y'_{12} 用一同数量的电容即可，这是单向化的基本条件。Y_{12} 可用 h 参量来表示，即 $Y_{12} = -h_{12}/h_{11}$，当温度上升或其他原因导致 I_E 变化时，h_{11} 变化的速度比 $-h_{12}$ 慢。这和式(6)比较可以看出，虽然形式一样，但效果完全不一样。当式(6)中的 h_{11R} 只要是增加，则 ρ_i 变小，不稳定区变小，此即原来的工作状态越来越更加稳定。我们只要控制各种因素使 h_{11R} 往大的方向即可。而单向化的问题，它要求各种因素恒定。当温度下降时，对工作稳定是有利的。而单向化问题，不论温度上升或下降都不利，因为 h_{11}，$-h_{12}$ 受温度影响而变化的速度不一样，温度上升或下降都会导致 Y_{12} 变化，而 Y' 是固定电容，只要 $Y'_{12} \neq Y_{12}$ 单向化就被破坏。这就要求一种特殊的电容，要求它能随温度而变，而且变的速度和 Y_{12} 一样。

5. 用 r 参数表示时，温度的影响

以 r 参数表示的共发射极运用的半导体管等效电路如图所示，其输入、输出电阻的表示式为：

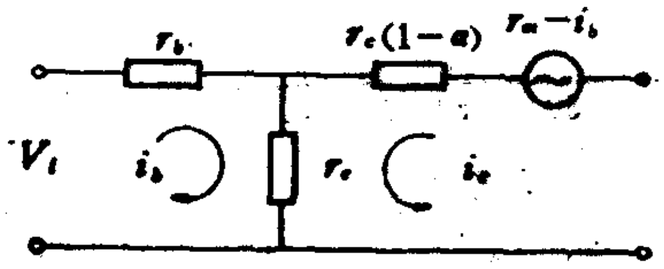


图 11

$$r_{入} = r_b + r_e \frac{r_c + r_e}{r_c - r_m + r_e}$$

$$r_{出} = r_c - r_m + r_e \frac{r_g + r_b + r_m}{r_g + r_b + r_e}$$

其中 $r_m = 2r_{co}$

r 参数与温度的关系如图 12 至 15 所示，根据这些图表，以其中的某一扩散型半导体管为例，当温度由 25℃ 变化到 50℃ 时

r_e 约由 450 千欧变化到 280 千欧，

r_b 约由 280 欧变化为 250 欧，

r_c 约由 36 欧变化为 40 欧，

α 基本不变。

设

r_g 为 100 欧，则

$r_{入}$ 约由 319 欧变化为 290 欧，

$r_{出}$ 约由 50 千欧变化为 35 千欧。

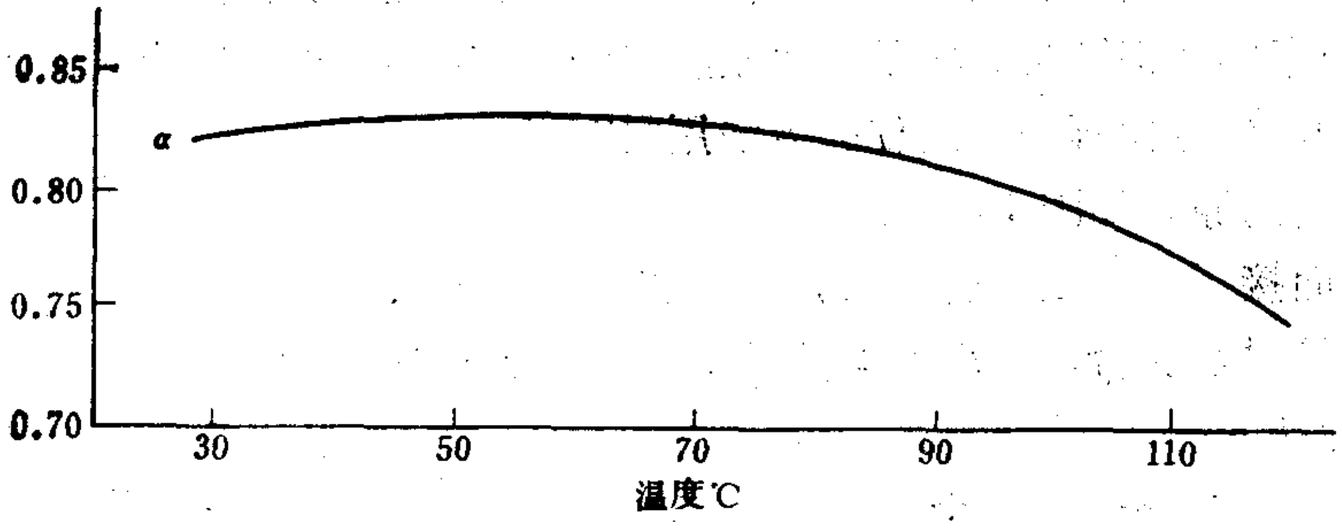


图 12

(扩散型)

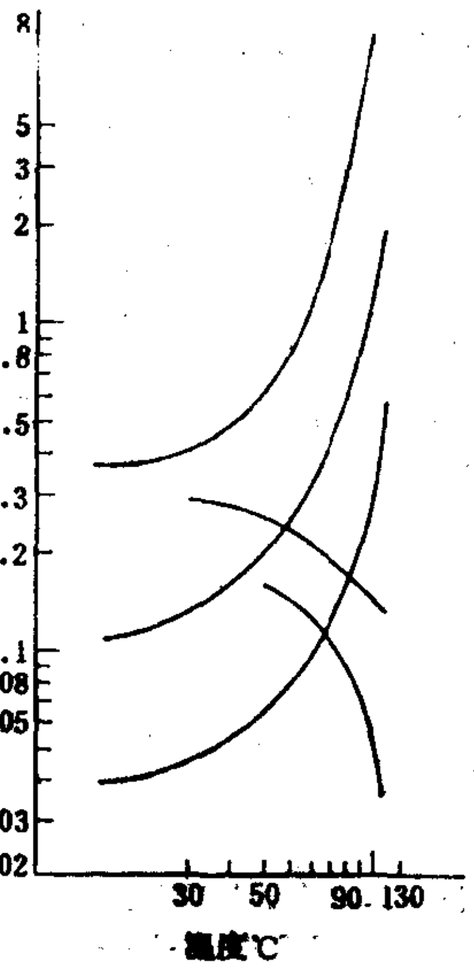


图 13

(生长结二个样品)

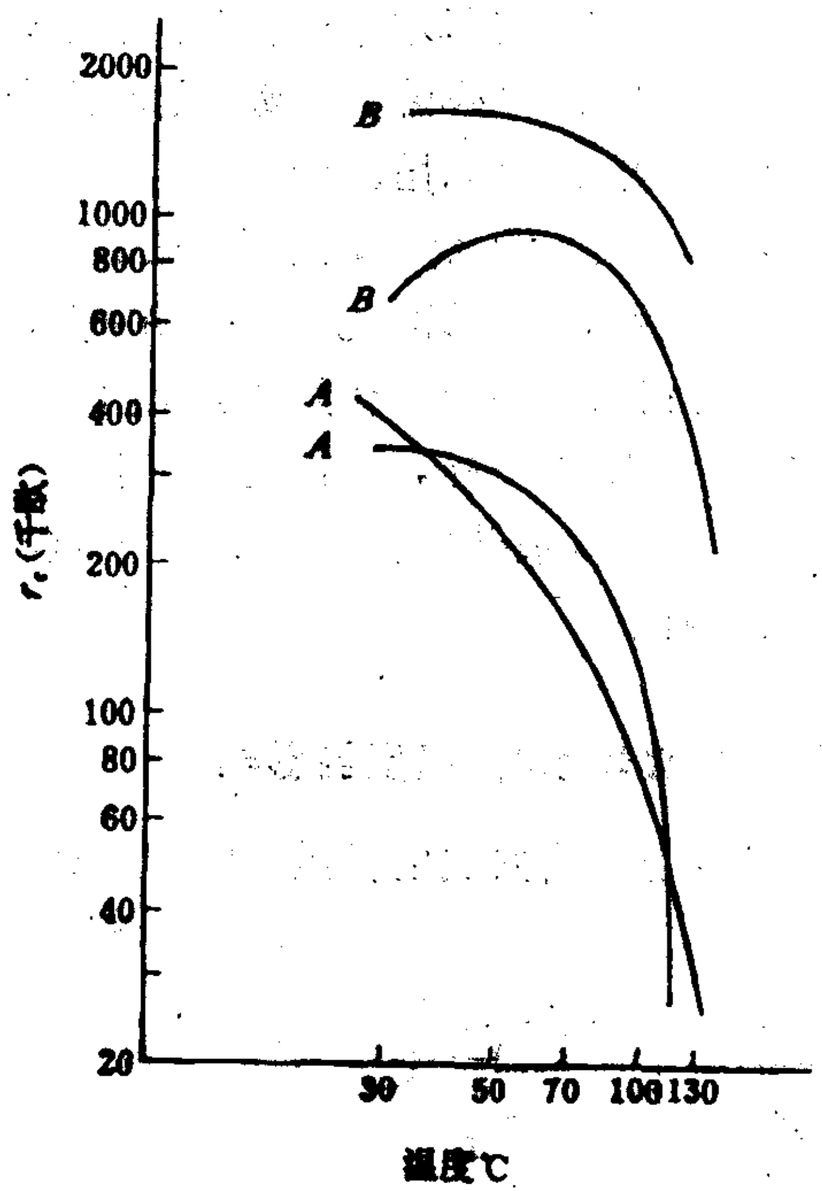


图 14

(A——扩散型两个样品，
B——合金型两个样品)

当调谐迴路失谐为 5 微微法时，相位移约 4° 左右。是提前还是滞后则要看谐振回路是容性失谐还是感性失谐。综合这种温度引起的相移。我们的经验认为这不是要求仪器恒温的理由，相反地，这些相移特点倒可以作为相位稳定的补偿作用。如果由于种种原因，其他参数的变化使整个讯道的相位滞后，则可利用这种特性使相位提前来补偿。

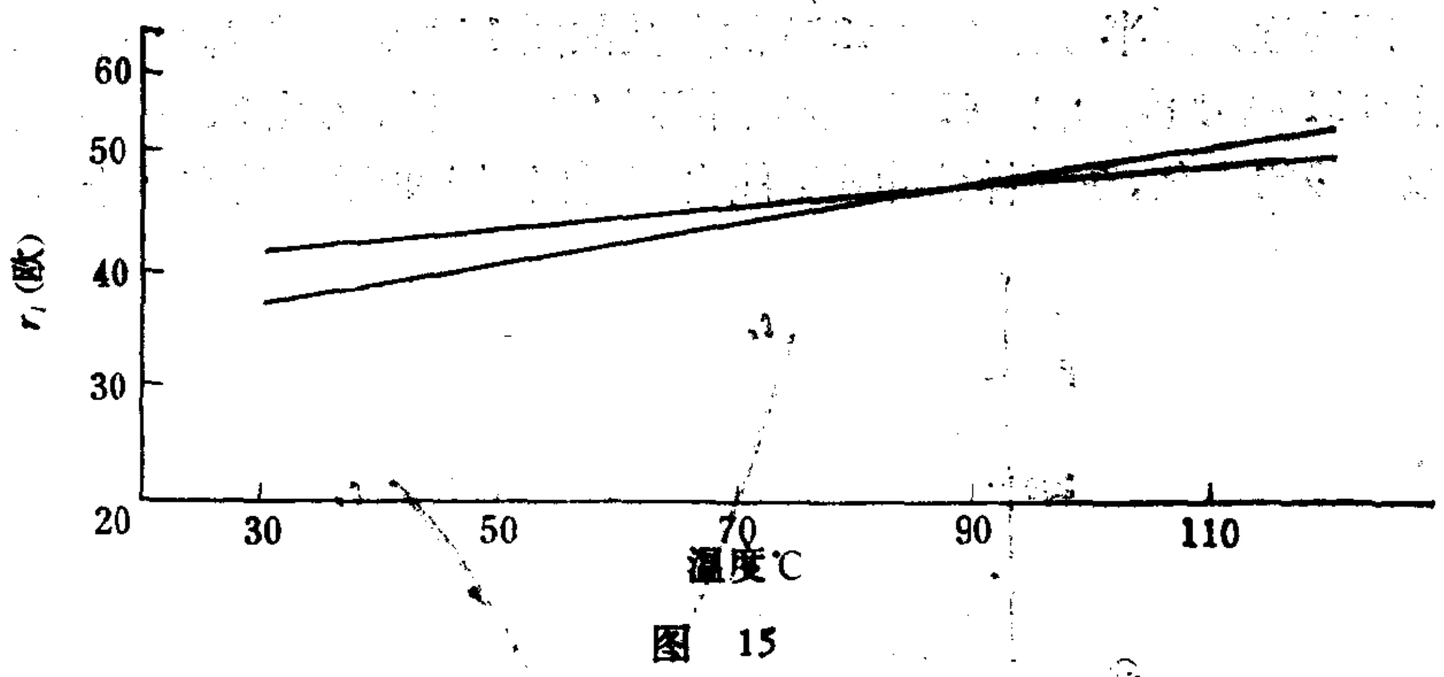


图 15

6. 对脉冲信息的影响

脉冲的参数包括脉冲的上升时间 t_r、贮积时间 t_s、下降时间 t_f 等，回路对脉冲的瞬变响应怎样，就是迴路对传递的信息失真程度。

而

$$t_r = \left[\frac{1}{(1-\alpha_{fb})\omega_{\alpha fb}}\right]\ln\left[\frac{i_B}{i_B - 0.9(1-\alpha_{fb})\dfrac{i_C}{\alpha_{fb}}}\right]$$

$$t_s = \left[\frac{\omega_{\alpha fb}+\omega_{\alpha rb}}{\omega_{\alpha fb}\omega_{\alpha rb}(1-\alpha_{fb}\alpha_{rb})}\right]\ln\left[\frac{i_{B1}-i_{B2}}{i_{C_1}(1-\alpha_{fb})/\alpha_{fb}-i_{B2}}\right]$$

$$t_f = \left[\frac{1}{(1-\alpha_{fb})\omega_{\alpha fb}}\right]\ln\left[\frac{(i_{C1}-\alpha_{fb}i_{B2})/(1-\alpha_{fb})}{(0.1i_{C1}-\alpha_{fb}i_{B2})/(1-\alpha_{fb})}\right]$$

其中 $\omega_{\alpha fb}$ 和 $\omega_{\alpha rb}$ 分别表示共基极时正向和反向 α（载止频率）。α_{fb} 和 α_{rb} 分别表示共基极时正向和反向 α 值[9]。

现以具有下列参量的半导体管为例：

$$\omega_{\alpha fb} = 10^7 \text{ 弧度/秒}, \quad \omega_{\alpha rb} = 10^6 \text{ 弧度/秒},$$

$$\alpha_{fb} = 0.98, \quad \alpha_{rb} = 0.70,$$

饱和时集电极电流为 $i_C \simeq V_{CC}/R_L = 10$ 毫安，

基极激励电流 i_{B1} 为 3 毫安，反向基极偏置电流为 i_{B2} 为 -0.5 毫安则

$$t_r = \left[\frac{1}{(1-0.98)(10^7)}\right]\ln\left[\frac{3}{(3-0.9)(1-0.98)10/0.98}\right] = 0.32 \text{ 微秒},$$

$$t_s = \left[\frac{(1.0+0.1)(10^7)}{(10^7)(10^6)(1-0.686)}\right]\ln\left[\frac{3.5}{(10)\left(\dfrac{0.02}{0.98}\right)+0.5}\right] = 5.62 \text{ 微秒},$$

$$t_f = \left[\frac{1}{(1-0.98)(10^7)}\right]\ln\left[\frac{(10)+(49)+(0.5)}{1+(49)(0.5)}\right] = 1.5 \text{ 微秒}。$$

以前述所达到的稳定度为例，如温度变化由 20℃→60℃，这时，I_E 的变化不超过 1/10。相应的 α 和 ω 的变化各为 1/100，同时引起 t_r、t_s、t_f 的变化也不超过 1/100，相当于脉冲式测高仪引入 10 厘米级的误差。

国外有些制造厂家对自已生产的一些半导体管进行了实验，给出了 I_c 与上述参数之

间的影响。超高速开关半导体管 2SA276 的参数如图 16 所示，当 I_c 增加 1/10 时，t_r 由 30 毫微秒增加 31 毫微秒，t_f 由 41 毫微秒下降到 40 毫微秒，t_s 由 71 毫微秒上升到 73 毫微秒，这样数量级的变化，在同样脉冲式无线电测高仪引人的误差约在数十厘米左右。

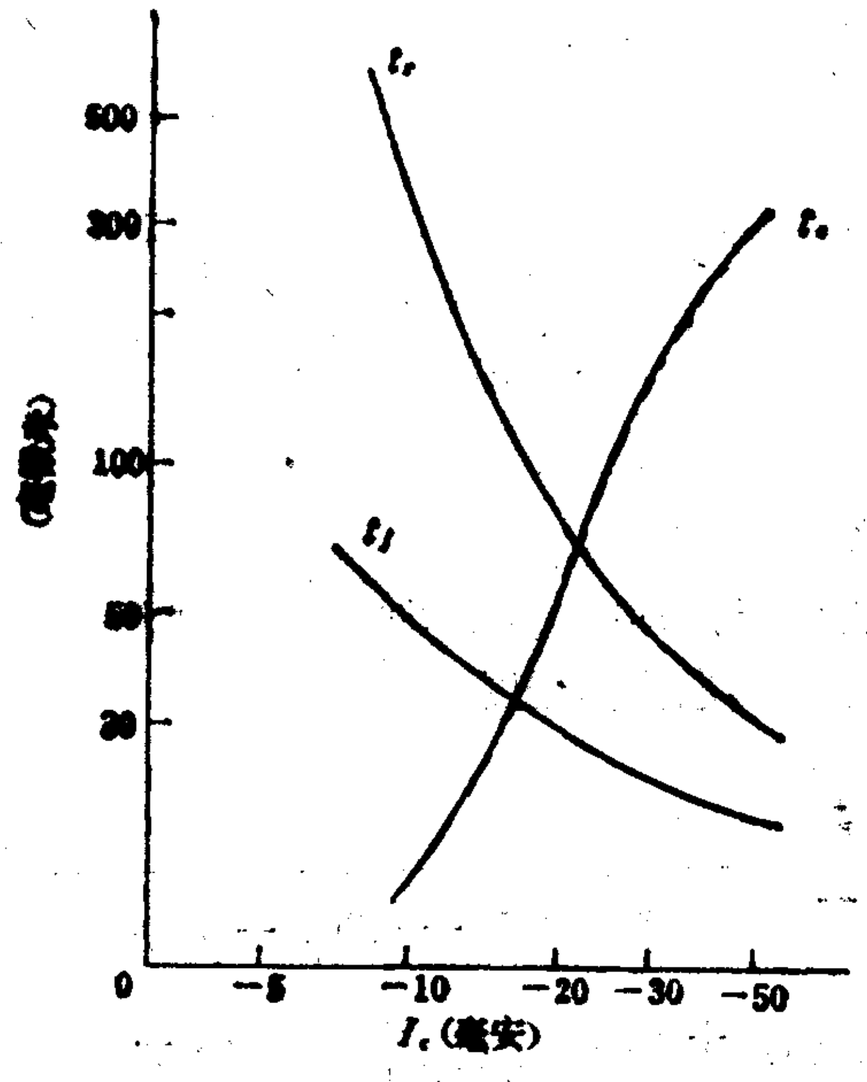


图 16

($T = 25℃$, $V_{cc} = -6V$)

7. 直流量偏问题

由于温度变化，I_{CBO} 增加 ΔI_{CBO1} 或者降低了 ΔI_{CBO2}，所对应的 I_c 和 V_{CB} 各变化为 ΔI_c 和 ΔI_{c2}；ΔV_{CB1} 和 ΔV_{CB2}。则电流稳定系数和电压稳定系数的表示式为：

$$S_{I_1} = \frac{\Delta I_{c1}}{\Delta I_{CBO1}}, \qquad S_{I_2} = \frac{\Delta I_{c2}}{\Delta I_{CBO2}}$$

$$S_{V_1} = \frac{\Delta V_{CB1}}{\Delta I_{CBO1}}, \qquad S_{V2} = \frac{\Delta V_{CB2}}{\Delta I_{CBO2}}$$

其实用意义在于，当提出了一定温度或直接是电流或电压的工作范围，就要求回路有相应的电流、电压稳定系数。由此稳定系数可设计出相应的回路，或去检查已在应用的回路。以正常温度为 20℃、变化范围 ±60℃ 时允许电流变化为 ±0.01 毫安，我们试求其电流稳定系数和设计相应的回路。

设一半导体管在 20℃ 时的 I_{CBO} 为 7 微安，则由公式可知

$$I_{CBO}(10℃) = 4 \text{ 微安和 } I_{CBO}(80℃) = 300 \text{ 微安}$$

则

$$\Delta I_{CBO1} = 300 - 7 = 293 \text{ 微安}$$

$$\Delta I_{CBO2} = 7 - 4 = 3 \text{ 微安}$$

从而

$$S_{I_1} = \frac{100}{293} = 0.34$$

$$S_{I_2} = \frac{10}{3} = 3.3$$

设计时应取较高的稳定系数，即 0.34。下列图 17 所示回路的电流稳定系数为：

$$S_1 \simeq \frac{G_1}{G_2 + G_3 + \dfrac{G_3(G_1 + G_2)}{G_L}}$$

式中

$$G = \frac{1}{R}$$

当

$$R_1 = 2\text{ 千欧}, \quad R_3 = 2\text{ 千欧}$$

$R_2 = 700$ 欧，$R_L = 500$ 欧时可达上述电流稳定系数，只是电压增益很小。

因为面结型二极管与温度的依从关系性质与三极管 P-N 结与温度的依从关系可以选择得非常一致，所以近来大家倾向于利用这一特点来作温度补偿。例如日立ベルソーナ TRT-398，-399 等型录音机[7]，都采用了图 18 所示置偏方法。值得我们在其他低频电路中应用。

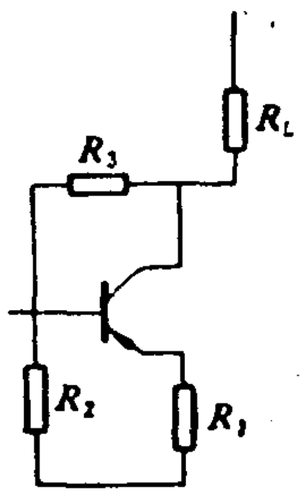


图 17

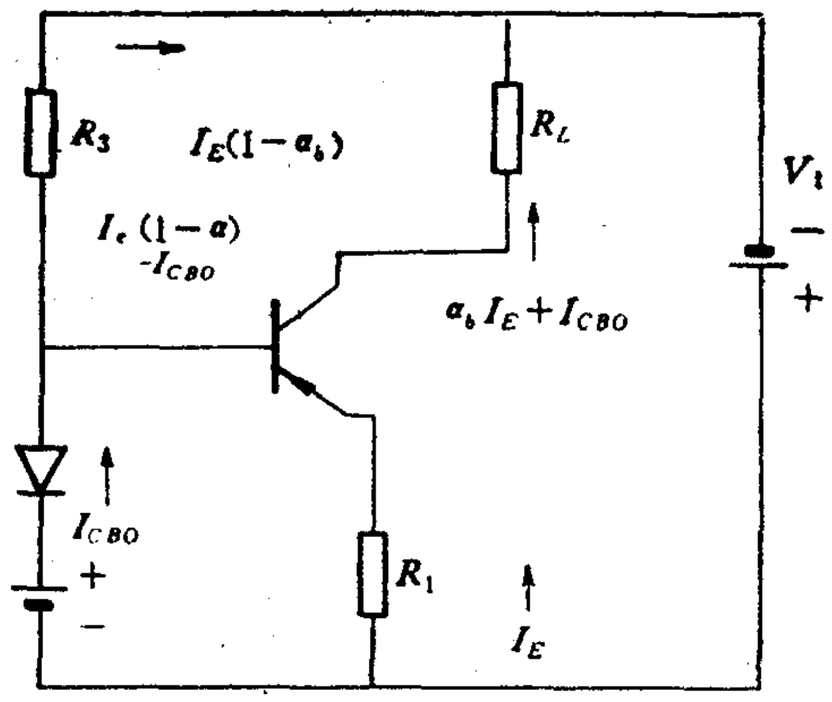


图 18

只要二极管的反向饱和电流随温度变化的曲线和三极管中 P-N 结随温度变化的曲线一样，结果半导体管 I_{CBO} 随温度变化的变量将由基极电路供应，而发射极电流不变。对 R_3 的要求是

$$R_3 = \frac{(V_1 - I_E R_1)}{I_E(1 - \alpha_b)}$$

在实际应用时，应对采用的二极管测出其 a）内阻——温度曲线；b）三极管发射极电流——温度曲线；c）置偏电压——发射极电流的曲线。选用 b，c 曲线相似的半导体管配用 a 曲线与上述半导体管 P-N 结曲线相同的二极管，这样是可以做到温度变化时 I_E 变化很小的回路。因为，当温度上升使 I_E 增加，但二极管内阻下降、置偏电压下降，又使 I_E 下降保持原值。

这种考虑是有相当价值的，不论在高频或低频回路，它排除了由于温度 → I_E → 其他参数的变化。

8. P-N结

半导体三极管有四个电容，即发射结的扩散电容和势垒电容；集电结的扩散电容和势垒电容。

扩散电容以 P-N-P 半导体管为例，其发射极扩散电容为[11]

$$C_{De} = d\theta/dV_e = \frac{1}{2} AWq^2 \frac{1}{KT} P_b^{(2)}$$

其中 A——结的面积，W——基区厚度，D——N区中的空穴扩散系数。

扩散电容由于在结的两边半导体结中堆积了少数载流子的电荷所引起的，即在N区堆积了由P区扩散过来的空穴，在P型堆积了由N型扩散过来的电子。当外界电压改变时，扩散电流的密度相应改变。顺向偏压加大，少数载流子在异型半导体中的电荷密度也愈大，形成有如充电；当顺向偏压减少时，有如放电，因此形成电容。

势垒电容包括突变结和缓变结。突变结的情况：

杂质电荷密度可写成

$$\rho(x) = \rho_1 = N_1 e, \quad \text{当 } x > 0 \text{ 时}$$

$$\rho(x) = \rho_2 = -Ne。 \quad \text{当 } x < 0 \text{ 时}$$

其中 N_1, N_2 分别为N型的施主密度和P型的受主密度，如图 19 所示。如 δ_1, δ_2 为相应电荷区厚度，则当结形成时。

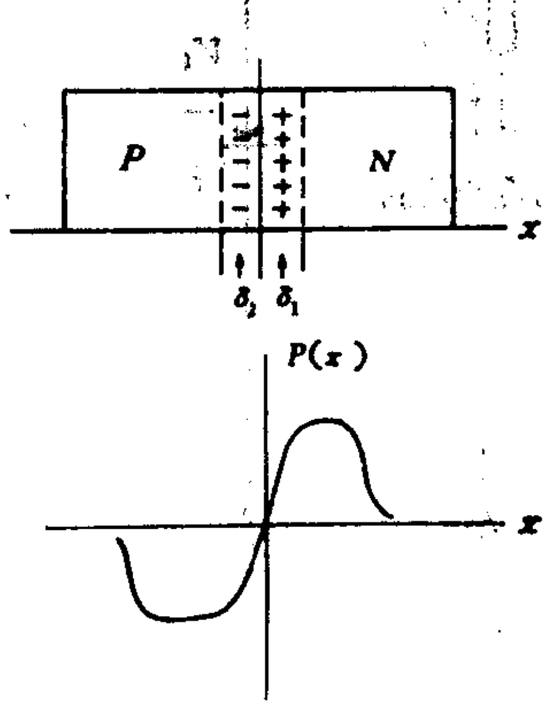


图 19

$$\delta_1\rho_1 = -\delta\rho_2 = Q$$

代入泊松方程

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho(x)}{\varepsilon}$$

$$E(x) = \frac{dV(x)}{dx}$$

所以

$$E(x) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^x \rho(\xi)d(\xi) + E(0)$$

其中 ξ 为积分变数。

所以

$$V(x) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^x\int_0^\eta \rho(\xi)d(\xi)d\eta + E(0) + V(0)$$

其中 η 为积分变数

利用边界条件 $x = \delta_1$、δ_2，$\frac{dV}{dx} = 0$ 得

$$C = 4\pi\frac{Q}{\varepsilon}$$

在有外加电压时，$x = -\delta_2$ 和 $x = \delta_1$ 间的电位差应为 $V - V_D$，所以

$$V_D - V = -\frac{2\pi}{\varepsilon}(\rho_1\delta_1^2 - \rho_2\delta_2^2) + C_1(\delta_1 + \delta_2) = \frac{2\pi}{\varepsilon}Q\delta$$

其中 δ 即势垒厚度，消去 δ

$$V_D - V = \frac{2\pi}{\varepsilon e}\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right) Q^2$$

得电容和电压的关系式：

$$C(V) = \left|\frac{dQ}{dV}\right| = \left[\frac{\varepsilon e}{\delta \pi}\left(\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\right)\frac{1}{V_D - V}\right]^{\frac{1}{2}}$$

当某合金三极管有以下参数时：

发射结面积为 0.0001 毫米^2，集电结面积为 0.0005 毫米^2，$\rho = 1.5$ 欧·厘米，$I_e = 1$ 毫安，$V_C = -4.5$ 伏，则

$$C_e = 22.8 \text{ 微微法}, \quad C_C = 22.8 \text{ 微微法},$$

$$C_{De} = 3840 \text{ 微微法}, \quad C_{DC} = 0.8 \text{ 微微法}。$$

(1) 从以上可以看出，P-N 结电容与 I_e 之间的关系，当 I_e 增加时，发射极扩散电容成直线比例增加。因此，不论共发、共基运用半导体管的输入电容都随 I_e 变化而变化。C_{DC} 的量级达数千微微法，变化 1/100 就是数十微微法，所以合金型的半导体管是不能用在我们这类仪器中，尤其是高频部分。

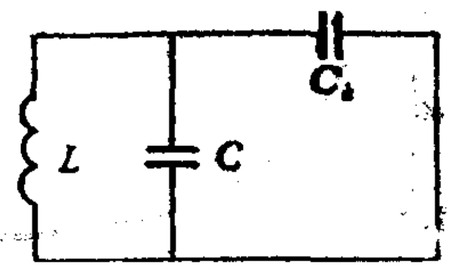


图 20

(2) P-N 结与电容与结上的电压的关系，如图 20 所示回路，C_k 为半导体管的结电容，则其谐振频率为[10]：

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L(L + C_k)}}$$

由于

$$C_k = C_{k_0}\sqrt{\frac{\varphi_k}{E_k + \varphi_k}}$$

且令

$$\alpha = C_k/C \cdot \beta = \frac{V}{E_k + \varphi_k}$$

其中 φ_k 为异型锗接触电势，E_k 为结上固定偏压，V 为谐振频率振幅。则

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta}}\right)}}$$

等谐振频率幅度改变时，β 变化 $\Delta\beta$，相应槽路谐振频率改变 $\Delta\omega$ 时，

$$\omega - \Delta\omega = \omega\left[1 + \frac{1}{4}\frac{\alpha\Delta\beta}{(1+\beta)(\alpha + \sqrt{1+\beta})}\right]$$

所以

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{4}\frac{\alpha\Delta\beta}{(1+\beta)(\alpha + \sqrt{1+\beta})}\Bigg]$$

可以看出，幅度变化越大，槽路频偏越大；固定偏压越大，同样讯号幅度变化下频偏越小。现以具体数据代入考虑。

$$C = 120 \text{ 微法}, \quad C_k = 30 \text{ 微法}$$

所以

$$\alpha = 0.25$$

$$\varphi_k = 0.72 \text{ 伏}^{[11]}, \quad E_k = 0.5 \text{ 伏}$$

则当讯号电压约 6 伏时变化一倍

$$\Delta\beta = \frac{2V}{E_k + \varphi_k} - \frac{V}{E_k + \varphi_k} \doteq 5, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \frac{1}{8}$$

我们的分频电路实际测得；槽路频移 1/10 时，部分槽路不能分频。不能分频即意味着整套系统的不能工作，而 $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{8}$ 时则超过此值。因此，在紧接中放级的分频回路是最容易被破坏而不能分频。中放级无论如何是要严格无相移限幅的。

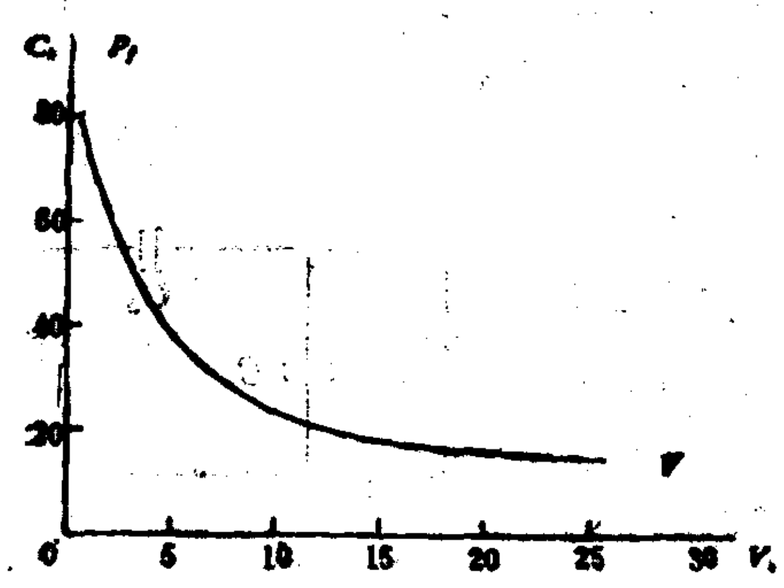


图 21

(3) P-N 结与偏压之间的关系

P-N 结与电压之间的关系[12]

$$C_k = C_{k0}\sqrt{\frac{\varphi_k}{V_k + \varphi_k}}$$

根据这公式我们可以计算出某半导体管偏压与 P-N 结的关系曲线，如图 21 所示，这是偏压所在结电容的变化。表 4[13] 所列的数据中一些高频管参数令人注意，它是用在对相位移敏感的部分，以 П411 为例，0.3 伏到 0.1 伏之间偏压变化（且不谈因此引起的 I_c 变化），对结电容就约达 2 微法的变化。

表 4

偏压 伏	集-基结电容 (微微法)					
	П14	П105	П403	П405	П408	П411
0	—	150	22.5	10	26	10
0.1	80	138	14	7	24	7.5
0.3	64	122	11	6	20	5.8
0.6	52	104	9	5	17	5.4
1.5	40	80	7.5	4	13	4.5
5.0	26	45	5	3	8	4

9. 其他影响、老化及寿命

以上我们讨论的都是一些正常的管子，那些参数的变化是正常的。还有一些半导体管在制造中已潜伏某些缺点，一段时间后才导致仪器精度下降。

(1) 表面处理

通常在锗表面存在有一层氧化膜和一些气体离子。长期影响的结果，臭氧和氧能使表面变成 P 型，水蒸汽和氨促使表面成为 N 型。这样就会在 P-N 结附近表面产生反型层，又与原来材料形成结，加大了原来结的面积，在我们的高精度仪器中振荡源频率漂移，造成精度下降。同时使反向饱和电流增加。水蒸汽会引起离子导电，形成大小不一的表面漏电流，引起仪器精度不稳。如果管子是密封的，在半导体管受热时，气体压力变化

也会引起性能不稳。两位贝尔电话实验室的研究人员 A. J. Wahl 和 J. J. Kleimack 在这方面长期做了不少研究[14]，现仅选几张有关曲线如图 22，23 所示。

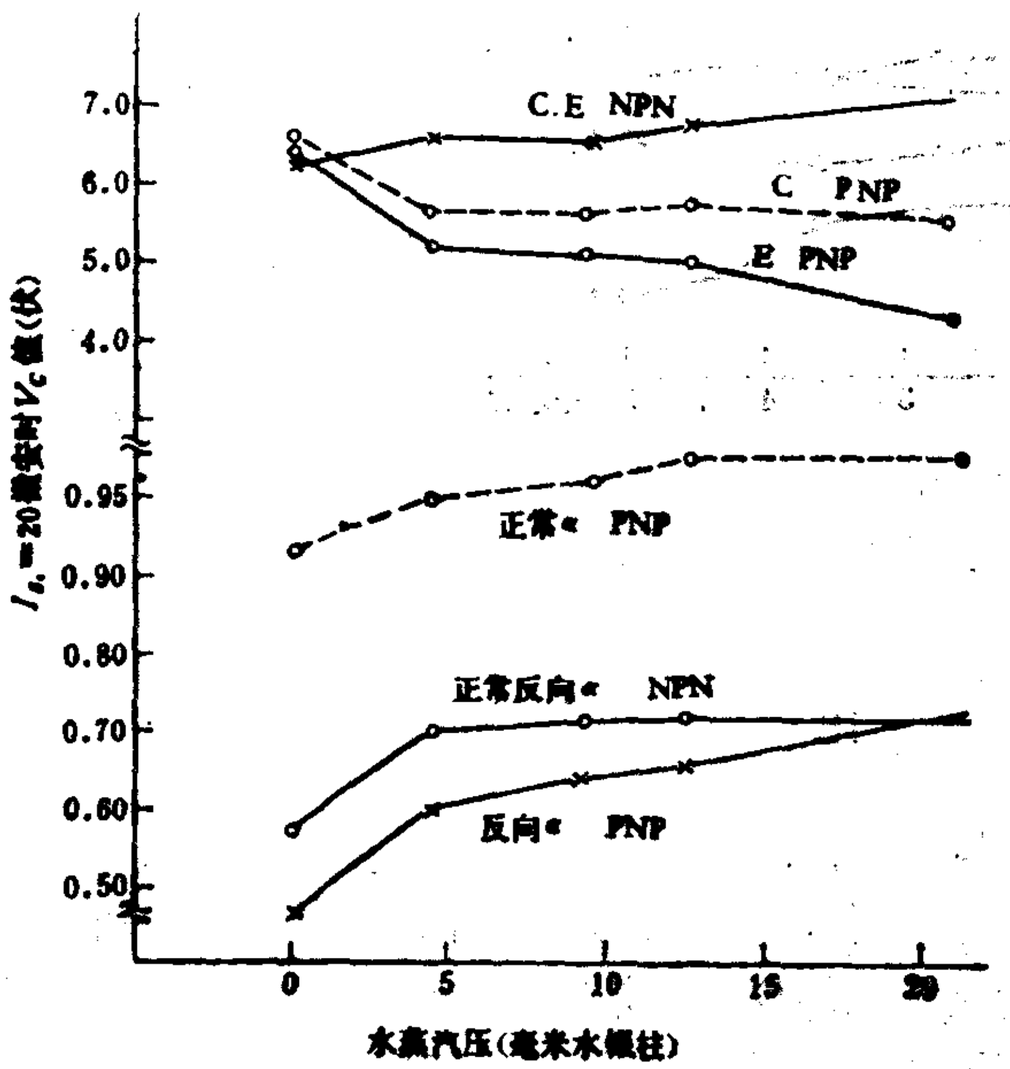


图 22

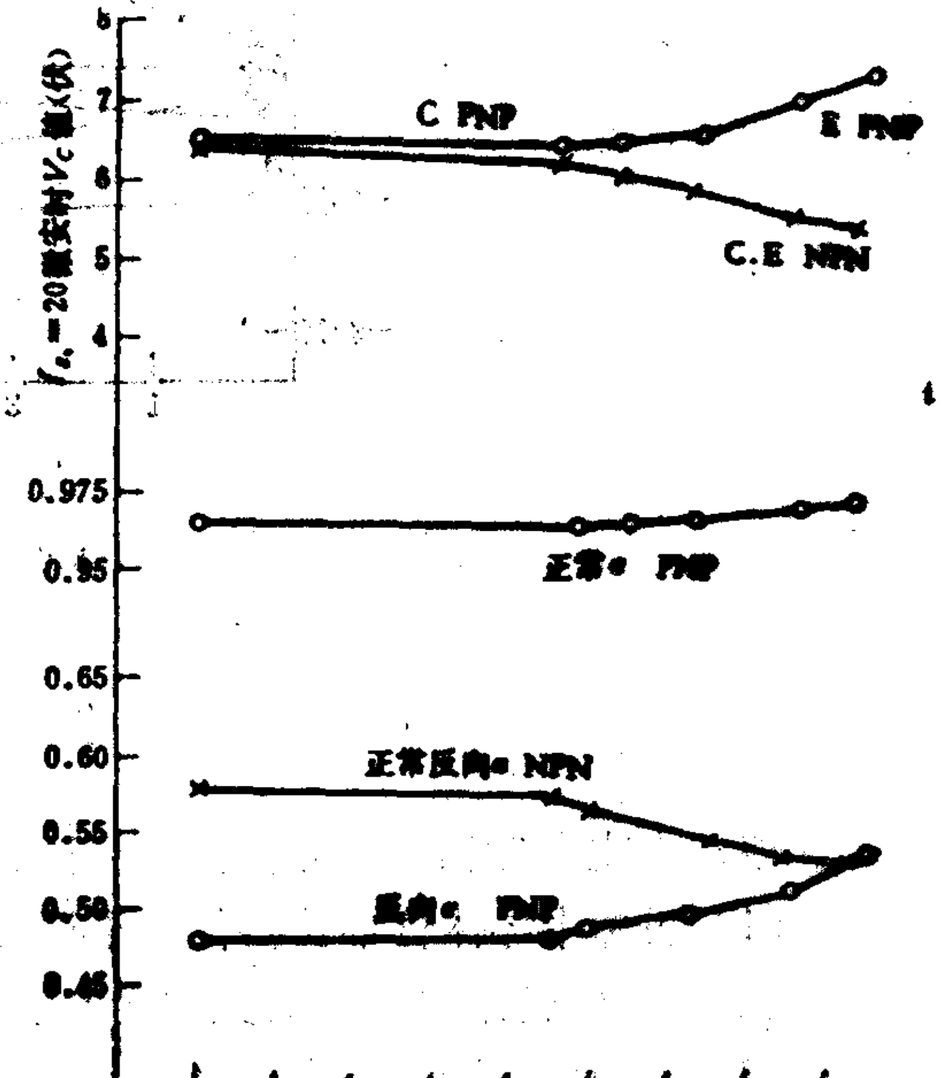


图 23

从图中可以看出，不论水蒸汽或者氧气的压力增大时，反向电流增加，或者是同低压时比较，达到同样数量的漏电流时，所需的电压下降。这样的不稳定，不是电路设计所能解决的，而只能在装配之前，老化过程中，将这类管子选出不用。

(2) 老化和寿命

半导体管从开始使用时起，随着时间的增加，各参数不是一个恒定值，一般在 500 小时内参数变化曲线的陡度很大，之后相当平坦，而 5000 小时以后，I_{co} 有较大增加，r 参数变化还是小的，见图 24，25。所以寿命终了与否，要看半导体管用在什么部位而定。而老化时间，从上列图表可以看出，一般均不宜少于 500 小时。而超过 5000 小时又进入不稳定状态。因此，仪器作正式鉴定时最好是 500 小时以后，而在 5000 小时以后发现仪器有不正常现象，就要考虑到某些半导体管的正常稳定寿命终了。

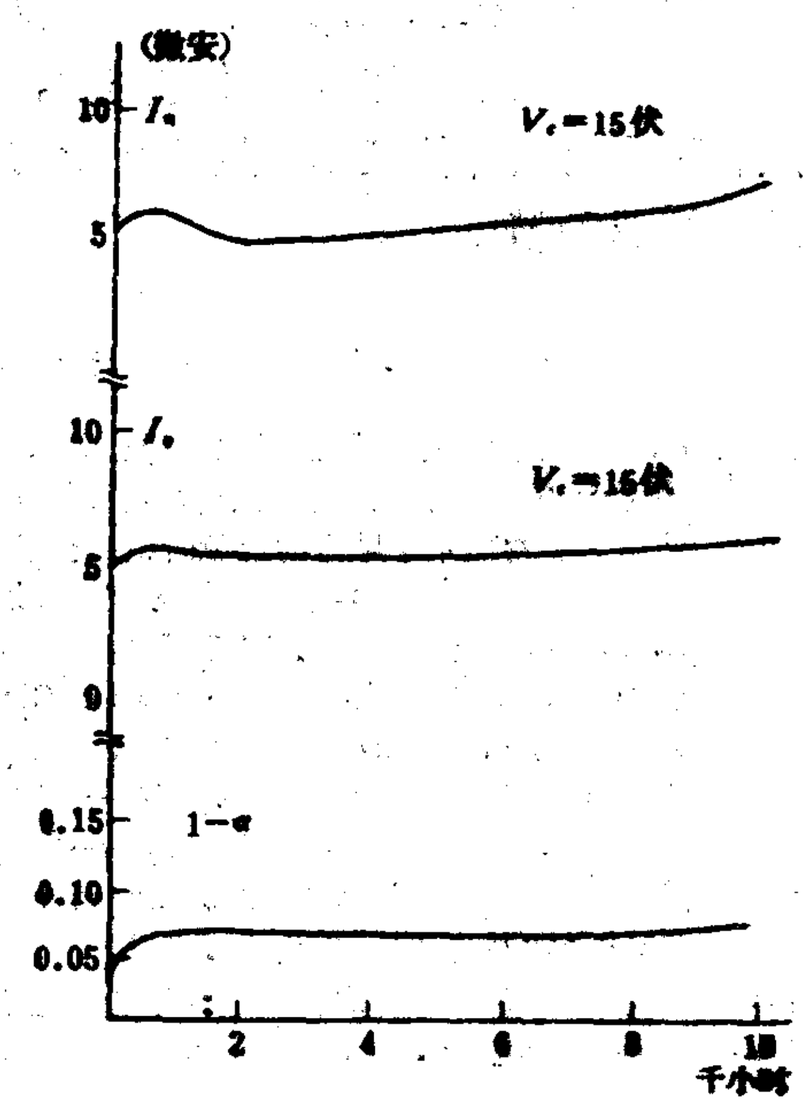


图 24

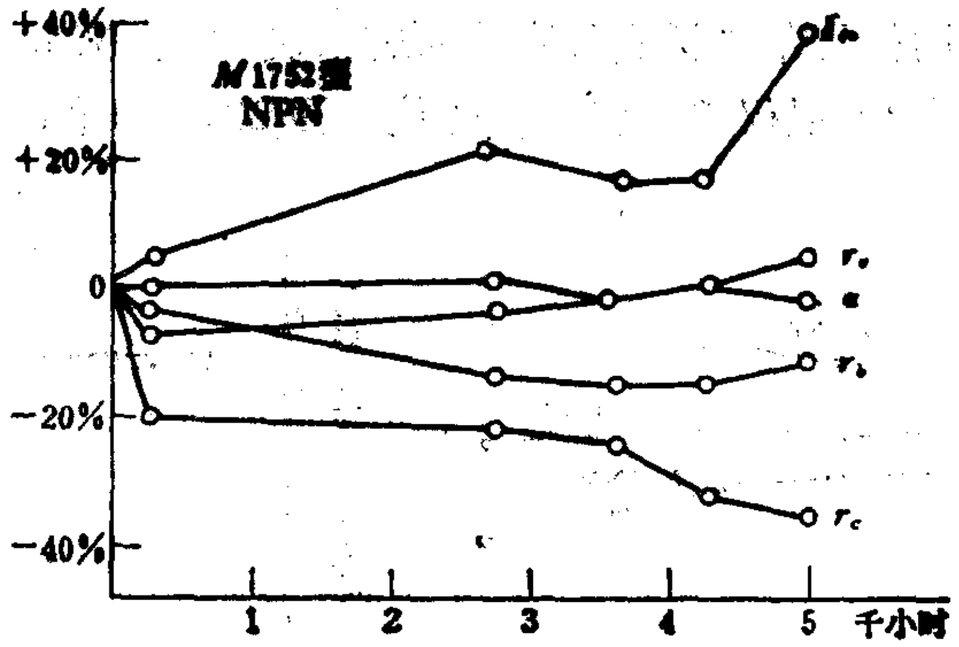


图 25

(M1752 型 NPN)

结 论

根据上述定性和定量分析，初步可以得出以下结论：

(1) 虽然半导体管早已替代电子管用在大量仪器中，但在高精密仪器中，如不采取相应措施，半导体管某些参数的变化比电子管更易破坏仪器的精度。

(2) 在设计制造高精度仪器时，必须恒温，或者逐级温度补偿。但后者的调整工作量很大，不适合于批量生产。逐级温度补偿，我们建议采用下面第 4 点中所述的方法，这是曾行之有效的。对输入讯号要作适当控制，放大过程中要作无相移自动增益控制。

(3) 由于同型号的半导体管参数离散率太高。即使台面半导体管、硅半导体也是如此，因此，在替换仪器中半导体管时，要严格符合原管各参数实际值。这也就是某些比较负责的厂家不仅标明仪器中半导体管的型号，而且特别还标明其实际参数值的原因。

(4) 某些半导体管参数的变化，在特定的电路中会引起相位超前或者滞后。这一特点有时也可以补偿仪器整机的相位滞后或超前。借此可以省去恒温措施，或者可以大大缩小恒温的精度。

参 考 文 献

[1] И. С. 高诺洛夫斯基编，吴大钊译：P-N 结电容在无线电电路中的应用，人民邮电出版社，(1965)。
[2] 罗无念、成众志：晶体管电子学，人民邮电出版社，(1958)。
[3] 北京大学物理系半导体物理教研组编：晶体管原理，人民教育出版社，(1960)。
[4] 垂井康夫，トランジスタの特性と回路，誠文堂新光社，(1961)。
[5] R. F. 希亚编：晶体管电路工程，科学出版社，(1964)。
[6] Shea, R. F., Principle of Transistor Circuit, pp. 46—48.
[7] Палехов, И., Влияние температуры на работу полупроводниковых приборов, *Радио*, 6,(1960).
[8] 小川誠一郎編：実用トランジスター回路集，無線と実験雑誌社，(1963)。
[9] Moll, T. L., Large Signal Trasient Response of Junction Transistors, Proc. IRE, 42 (1954).
[10] Демин, В. П., О свободных колебаниях в контуре с емкостью P-n перехода, *Радиотехника и Электроника*, **1**, (1959), p. 749.
[11] (苏)加尔彼林等著，周孔章译：半导体电子学，科学出版社，(1961)。
[12] Самойленко, В. И., Особенности работы полупроводниковых диодов и триодов при больших напряжениях, Оборонгиз, (1959), P. 19.
[13] С. В. 贝尔卓夫，林一凡译：参量放大器，人民邮电出版社，(1965)。

[14] Wahl, A. J., Kieimock, J. J., Factors Affecting Reliabitity of Alloy Junction Transistors, pp. 494—502.

RESEARCH ON THE INFLUENCE OF THE VARIATIONS OF THE TRANSISTOR PARAMETERS ON THE INSTRUMENTAL ACCURACY

Xu Zhiyang

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In the wake of ever developing in geodynamic science, the necessity of high precision instruments is put forward increasingly. Though the transistors have been long applied in many instruments instead of the vacuum tubes, in some high precision instruments used for geodynamic observation and measurement the variation of transistors parameters is one of the principal causes which makes the accuracy fall. In this article, based on the physics theory, the effects of the ambient temperature, the variation of amplitude of the input signal, and the change of frequency are discussed; all of which elicit the variation of the transistors parameters.

From this point, some reference methods to improve the accaracy of precision instruments used now and for the design of new precision instruments are afforded.